REVISÃO DE VIBRAÇÃO

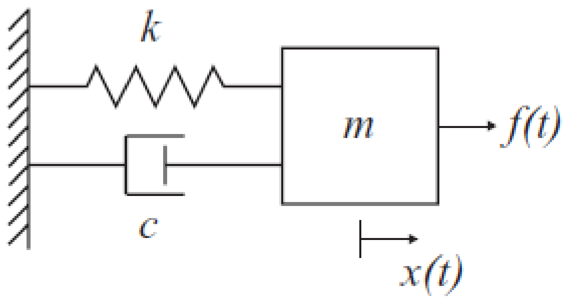
Importância e Aplicabilidade

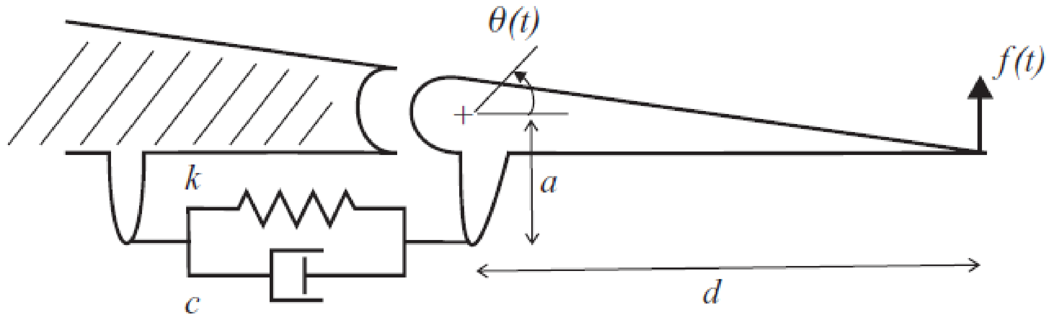
- Uma estrutura aeronáutica é submetida a carregamentos dinâmicos
- A dinâmica estrutural difere dos problemas estáticos onde a primeira considera a natureza variável dos esforços solicitantes com o tempo, e também a importância da distribuição de aceleração pela estrutura e como esta afeta a inércia estrutural e, portanto a resposta estrutural a um dado esforço solicitante.

1 GDL

Um sistema de um grau de liberdade (GDL) é escrito usando apenas uma coordenada, como pro exemplo deslocamento ou rotação.

Todos os sistemas que podem ser descritos como de 1 GDL podem ser descritos usando a mesma forma para as equações.





1 GDL

A forma clássica de um sistema com 1 GDL possui: massa (m), mola com rigidez K e um amortecedor com coeficiente c (a idealização da dissipação de energia afeta na resolução do sistema).

A forma diferencial da equação de Lagrange é escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial \Im}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial U}{\partial x}=Q_x=\frac{\partial \delta W}{\partial \delta x}$$

Onde T é a energia cinética, U é a energia potencial (ou de deformação par ao nosso caso), $\Im$ é a função dissipativa, Q_x é a força generalizada e W é o trabalho. Fazendo as substituições na equação de Lagrange tem-se para o caso linear e de rotação (da figura da superfície de comando):

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f\left(t\right) \qquad J\ddot{\theta}+ca^2\dot{\theta}+ka^2\theta=df\left(t\right)$$

1 GDL

Para a condição de vibração livre (sem força, f(t)=0) as condições iniciais são impostas e o movimento toma a forma não oscilatória ou oscilatória a depender do amortecimento do sistema. Para a solução da equação de movimento, assume-se a forma do movimento dada pela equação

$$x(t) = Xe^{\lambda t}$$

Substituindo na equação linear:

$$\lambda^2 m + \lambda c + k = 0$$

A solução da equação acima para o caso oscilatório:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

1 GDL

Para a condição de vibração forçada ($f(t) \neq 0$) as reposta da aeronave em relação ao carregamento deve ser considerada, sendo que o carregamento pode ser dividido em três tipos:

1-Harmonico: frequência única, por exemplo rotor desbalanceado.

2-Não harmônico determinístico: Inclui rajada discreta (perfil 1-cos) e várias manobras em vôo (entrada por superfície de comando).

3-Sinal aleatório: Inclui a análise de turbulência, cargas no solo (perfil da pista). Normalmente faz-se análise no domínio da frequência.

1 GDL

Resposta para uma excitação harmônica

A força é dada por: $f(t) = Fsen(\omega t)$

A resposta em regime é definida como:

$$x(t) = Xsen(\omega t - \phi) = Xe^{i(\omega t - \phi)} = \left(Xe^{-i\phi}\right)e^{i\omega t} = \tilde{X}e^{i\omega t} = \tilde{X}\cos(\omega t) + i\tilde{X}sen(\omega t)$$

F e X são amplitudes da excitação e da reposta respectivamente, Φ é o atraso da resposta.

Substituindo x(t) na equação de movimento e resolvendo a equação, tem-se:

$$\left(-\omega^2 m + i\omega c + k\right)\tilde{X} = F$$

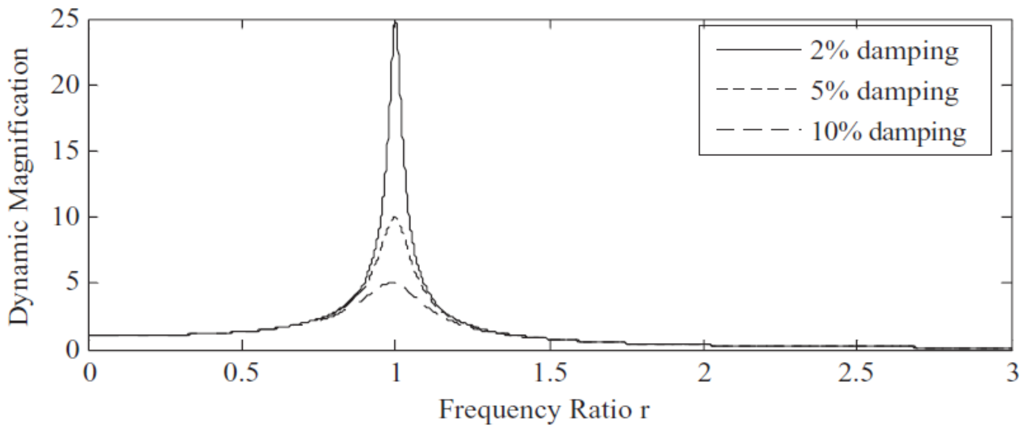
$$\tilde{X} = Xe^{-i\phi} = \frac{F}{k - \omega^2 m + i\omega c}$$

$$X = \frac{F}{\sqrt{\left(k - \omega^2 m\right)^2 + \left(\omega c\right)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)$$

1 GDL

FRF: $$H_D(\omega) = \frac{\tilde{X}}{F} = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c} = \frac{1/k}{1 - r^2 + i2\zeta r}, \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

H_D é a resposta em frequência para o deslocamento. Descreve como o sistema se comporta quando submetido a uma excitação harmônica. A FRF de velocidade e aceleração é dada multiplicando H_D por iω. $H_V = i\omega H_D$ e $H_A = \omega^2 H_D$.
A quantidade $kH_D(\omega)$ é conhecida como magnificação dinâmica. A ressonância ocorre quando a frequência de excitação ocorre na mesma frequência (ou próxima a ela) natural não amortecida (ω_n) da estrutura.



1 GDL

Amortecimento estrutural (histerético)

Assume-se que o amortecimento é proporcional a velocidade (amortecimento viscoso), porém na prática a mensuração do amortecimento em estruturas, em algumas vezes, apresenta comportamento independente da frequência, mas age em quadratura (fase de 90º) com o deslocamento do sistema (amortecimento histeretico). Nesses casos combina-se o amortecimento e a rigidez formando uma "matriz de rigidez" complexa.

$$k^* = k(1 + ig)$$

Onde g é o coeficiente de amortecimento estrutural ou fator de perda (loss fator).

Nesse caso a equação de movimento do sistema fica:

$$m\ddot{x} \wedge + k(1 + ig) = f(t)$$

1 GDL

Amortecimento estrutural (histerético)

Para o caso que o movimento se dê em uma única frequência:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = f(t) \qquad c_{eq} = \frac{gk}{\omega} \qquad \zeta_{eq} = \frac{g}{2}\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)$$

1 GDL

Vibração forçada transiente/aleatório – solução no domínio do tempo.

A resposta no tempo pode ser calculada por abordagem analítica: Sendo a excitação determinística e simples de ser escrita matematicamente. Por exemplo a resposta para uma entrada tipo degrau:

$$s(t) = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen(\omega_d t + \psi)\right]$$

$$\tan\psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Para uma entrada tipo impulso: $h(t) = \dfrac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sen(\omega_d t)$

1 GDL

Vibração forçada transiente/aleatório – solução no domínio do tempo.

Também pode ser obtida pelo principio da sobreposição (valido somente para sistemas lineares), onde a resposta do sistema $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a para uma entrada $f_1(t)$ e $f_2(t)$ podem ser sobrepostas de modo a obter um outra resposta equivalente a soma das mesmas ($f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ e $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$).

Por fim, pode-se utilizar a convolução sendo empregada para qualquer excitação (a excitação pode ser decomposta em pequenos impulsos de diferentes intensidades) .

$$x(t) = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

1 GDL

Vibração forçada transiente/aleatório – solução no domínio da frequência.

Para um sinal genérico (pode ser decomposto como a composição de diversos sinais senoidais de amplitude e frequências diferentes) a resposta do sistema pode ser obtida pela sobreposição da resposta para cada um dos sinais individuais usando a FRF.

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{FFT\, de\, x(t)}{FFT\, de\, f(t)}$$

1 GDL

Vibração forçada aleatória – solução no domínio da frequência.

Há basicamente dois casos para cargas em aeronaves onde a resposta a uma estrada aleatória é necessária. Voo em turbulência e taxi.
Para o caso de turbulência é comum usar espectro de carregamentos (PSD – será visto mais para frente).
Para taxi a reposta é normalmente dada no domínio do tempo (efeitos não lineares)

1 GDL

Vibração forçada aleatória – solução no domínio da frequência.

Quando considera-se uma excitação aleatória, normalmente são considerados abordagens estatísticas através do uso da PSD (power spectral density). A reposta é definida como:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{T}{2\pi} X(\omega)^{*} X(\omega) = \frac{T}{2\pi} \left| X(\omega)^{2} \right|$$

* Denota o conjugado complexo. A PSD é proporcional ao quadrado da FFT da amplitude para cada frequência (unidade m^2/rad s se x(t) for deslocamento).

1 GDL

Vibração forçada aleatória – solução no domínio da frequência.

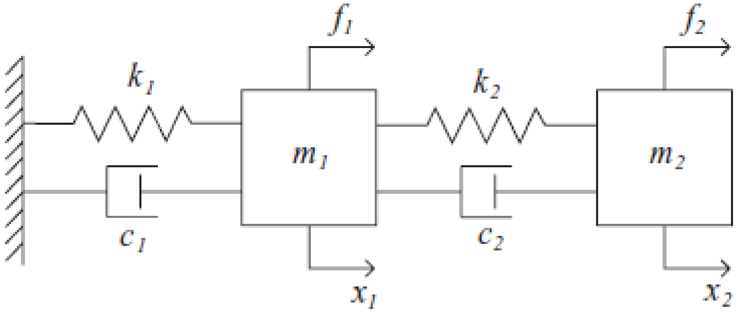
Multiplicando a definição da FFT pelo seu conjugado:

$$X(\omega)X(\omega)^* = S_{XX}(\omega) = H(\omega)F(\omega)H(\omega)^* F(\omega)^* = \left|H(\omega)^2\right| F(\omega)F(\omega)^* = \left|H(\omega)^2\right| S_{FF}(\omega)$$

Conhecendo a PSD de entrada (excitação) a PSD de resposta ($S_{XX}(\omega)$) é então determinada.

Multiplos GDL

Para o caso linear com 2 graus de liberdade:



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x_2 - x_1 \right)^2$$

$$\Im = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1 \right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial \Im}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j} = Q_j = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta x_j}$$

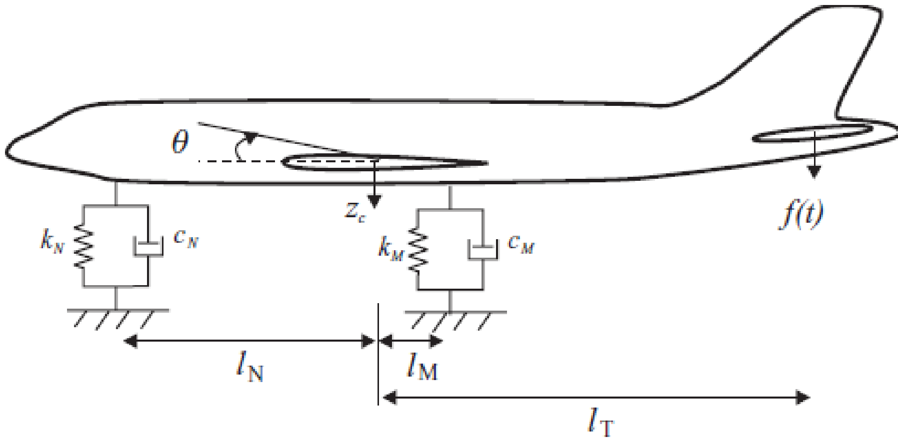
$$m_1 \ddot{x}_1 + \left(c_1 + c_2 \right) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + \left(k_1 + k_2 \right) x_1 - k_2 x_2 = f_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = f_2(t)$$

$$\delta W = f_1 \delta x_1 + f_2 \delta x_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Multiplos GDL



Para o caso linear e rotação com 2 graus de liberdade:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}_C^2 + \frac{1}{2} I_Y \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_N \left(z_C - l_N \theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_M \left(z_C + l_M \theta\right)^2$$

$$\Im = \frac{1}{2} c_N \left(\dot{z}_C - l_N \dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} c_M \left(\dot{z}_C + l_M \dot{\theta}\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial \Im}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j} = Q_j = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta x_j}$$

$$\delta W = f\left(\delta z_C + l_T \delta\theta\right)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_C \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_N + c_M & -l_N c_N + l_M c_M \\ -l_N c_N + l_M c_M & l_N^2 c_N + l_M^2 c_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_N + k_M & -l_N k_N + l_M k_M \\ -l_N k_N + l_M k_{M2} & l_N^2 k_N + l_M^2 k_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_C \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ l_T f \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$$

Multiplos GDL

Vibração não amortecida:
Assumindo a reposta dada por:

$$x(t) = Xsen(\omega t)$$

Chega-se no seguinte auto problema

$$\left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right]\mathbf{X} = 0$$

Considerando a resposta não trivial para o sistema, e fazendo o determinante igual a zero, tem-se um polinômio característico de ordem N (igual ao número de GDL).
As raízes desse polinômio (autovalor) ω_j são as frequências naturais não amortecidas.
Para cada frequência há o seu correspondente autovetor $\mathbf{X}_j$

Os autovetores obtidos do autoproblema formam uma base (linearmente independentes).

$$\Phi = \left[X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \ldots \quad X_N\right]$$

Multiplos GDL

Vibração amortecida:

Assumindo a reposta dada por:

$$x(t) = Xe^{\lambda t}$$

Chega-se no seguinte auto problema

$$\left[\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{X} = 0$$

Multiplos GDL

Amortecimento proporcional (Rayleigh) e não proporcional

Proporcional: $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ Possibilita, através da transformação modal o desacoplamento das equações de movimento

Não proporcional: Acoplamento das equações de movimento

Multiplos GDL

Transformação modal

A base formada peloas autovetores pode ser utilizada para transformar as equações de movimento, em coordenadas físicas, para coordenadas modais, sem haver acoplamento entre elas (facilidade para solução do sistema).

Definindo a transformação de coordenadas: $x = \Phi q$

Substituindo na equação de movimento:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{q} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{q} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi q = \Phi^T \mathbf{f}$$

$$\mathbf{M}_q \ddot{q} + \mathbf{C}_q \dot{q} + \mathbf{K}_q q = \mathbf{f}_q$$

Sendo o amortecimento proporcional:

$$X_i^T M X_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ m_j, & i = j \end{cases}$$

No caso de amortecimento não proporcional há acoplamento das equações através da matriz de amortecimento.

Multiplos GDL

Normalização das formas modais

Os valores das massas, amortecimento e rigidez modal dependem da normalização aplicada nos vetores (autovetores) da base modal. Portanto a massa modal (e amortecimento e rigidez) não possuem um valor único!

As metodologias mais comuns para normalização são:

-As formas modais são normalizadas de modo a obter massa modal unitária

-As formas modais são normalizadas de modo a se obter um valor máximo de 1.

- As formas modais são normalizadas de modo a se obter um vetor de norma 1.

Multiplos GDL

Significado das coordenadas modais

A coordenada q_j indica a quantidade do j^{th} modo presente no deslocamento da estrutura. Não é possível medir fisicamente essa quantia, sendo que esta define uma forma característica e os valores para cada coordenada dependem da técnica de normalização empregada.

Dimensão das coordenadas modais

É interessante pensar que os modos de vibrar (autovetores) são quantias admensionais. Aplicando essa abordagem, a massa modal possui unidade de massa, e as coordenadas modais possuem dimensão de deslocamento.
Para movimentos mistos (deslocamento e rotação), considerando manter as equações consistentes do ponto de vista dimensional, as formas modais (autovetores) devem ser admensionalizadas. Como não é possível admensionalizar os vetores simultaneamente para translação e rotação, admensionaliza-se somente para a translação.

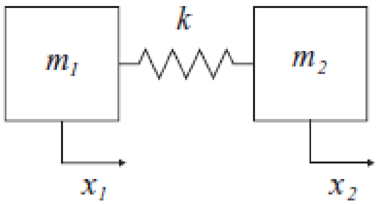
Multiplos GDL

Redução de ordem do modelo

Trabalhando em coordenadas modais é possível reduzir a quantidade de modos de vibrar, trabalhando somente com os de interesse. Redução do tamanho do modelo! O efeito residual dos modos de alta frequência podem ser omitidos, por isso é normal incluir alguns modos com frequências mais altas do que as de interesse.

Multiplos GDL

Sistemas livre-livre:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calculando as frequências naturais para esse sistema:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2}}$$

O primeiro modo do sistema é conhecido como modo de corpo rígido: $X = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Sendo o segundo modo: $X = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\dfrac{m_1}{m_2} \end{Bmatrix}$ Sendo esse um modo flexível com as massas se deslocando em direções opostas

Multiplos GDL

Vibrações harmônicas forçadas

A excitação e o deslocamento, considerando álgebra complexa, são dados por:

$$f(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$$

$$x(t) = \tilde{\mathbf{X}}e^{i\omega t}$$

Procedendo com as substituições na equação de movimento:

$$\left[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{F}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]^{-1}\mathbf{F}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}$$

Em coordenadas modais o sistema acima fica escrito como:

$$q(t) = \tilde{Q}e^{i\omega t}$$

$$\tilde{Q} = \left[-\omega^2\mathbf{M}_q + i\omega\mathbf{C}_q + \mathbf{K}_q\right]^{-1}\phi^T F$$

Lembrando que para transformar novamente em coordenadas físicas: $\tilde{X} = \phi\tilde{Q}$

Referências Bibliográficas

[1] Center of Gravity Limitations, Boeing Company

[2] Aircraft CG Envelopes-Longitudinal, Lateral, Vertical, SAWE

[3] Aircraft Weigth and Balance Handbook - FAA-H-8083-1A, U.S. Department of Transportation, FAA, 2007.