MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 4 (14/09/2020)

Ordem

Seja S um conjunto. Uma ordem em S é uma relação, denotada pelo símbolo $<$, que tem as seguintes propriedades:

(O1) Tricotomia: Se $a, b \in S$ então exatamente uma das afirmações é verdadeira: $a < b, \quad a = b, \quad b < a$.

(O2) Transitividade:
Se $a, b, c \in S$ satisfazem $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

<u>Notações:</u>

(1) Às vezes é melhor denotar $b > a$ em vez de $a < b$.

(2) A notação $a \leq b$ indica que vale $a < b$ ou $a = b$. Em outras palavras, $a \leq b$ é a negação de $a > b$.

(3) Se as desigualdades $a < b$ e $b < c$ são válidas simultaneamente, escrevemos abreviadamente $a < b < c$.

Corpo ordenado

Um *corpo ordenado* é um corpo K no qual está definida uma ordem que, além de O1 e O2, também satisfaz:

(O3) Compatibilidade da ordem com a adição:
Se $x, y, z \in K$ e $x < y$ então $x + z < y + z$.

(O4) Se $x, y \in K$, $x > 0$ e $y > 0$ então $xy > 0$.

Se $x > 0$, dizemos que x *é positivo*; se $x < 0$, dizemos que x *é negativo*.

- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.
- $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.
- $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado.
    - Em $\mathbb{C}$ não é possível definir uma ordem que satisfaça (O3) e (O4)!

Corpo ordenado

Em todo corpo ordenado valem as seguintes propriedades:

(Q1) Se $x > 0$ então $-x < 0$ e vice-versa.

(Q2) Compatibilidade da ordem com a multiplicação:
Se $x > 0$ e $y < z$ então $xy < xz$.

(Q3) Se $x < 0$ e $y < z$ então $xy > xz$.

(Q4) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$.

Em particular, $1 > 0$.

(Q5) Se $x > 0$ e $xy > 0$ então $y > 0$.

Em particular, inverso de positivo é positivo.

(Q6) Se $0 < x < y$ então $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Corpo ordenado

Consequência importante das propriedades (O3) e (Q4):

- Podemos somar 1 em cada lado da desigualdade $\mathbf{0} < \mathbf{1}$ sem alterar a desigualdade e obter $1 + \mathbf{0} < \mathbf{1} + 1 \overset{\text{(def)}}{=} 2$.
- Fazendo o mesmo com cada nova desigualdade, obtemos:

  $2 = 1 + \mathbf{1} < \mathbf{2} + 1 \overset{\text{(def)}}{=} 3,$

  $3 = 1 + \mathbf{2} < \mathbf{3} + 1 \overset{\text{(def)}}{=} 4, \quad \ldots$

- Além disso, como sabemos que $-1 < 0$, podemos deduzir as seguintes desigualdades:

  $-2 = -1 + (-\mathbf{1}) < \mathbf{0} + (-1) = -1,$

  $-3 = -1 + (-\mathbf{2}) < -\mathbf{1} + (-1) = -2,$

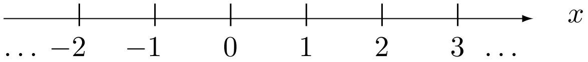
  $-4 = -1 + (-\mathbf{3}) < -\mathbf{2} + (-1) = -3, \quad \ldots$

Corpo ordenado

As desigualdades

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

justificam a representação dos números inteiros na reta numérica:



Pense em casa como poderia ser justificada a representação dos racionais na reta a partir das desigualdades deduzidas.

Principal referência bibliográfica sobre ordem e corpos ordenados vistos até aqui:

- Rudin, W., *Princípios de Análise Matemática*

Conjuntos limitados

Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$ um subconjunto não vazio.

Definição. Dizemos que A é *limitado superiormente* se existir um elemento $M \in K$ tal que $a \leq M, \forall a \in A$. Tal elemento M é chamado *majorante* ou *cota superior* de A.

Definição. Dizemos que A é *limitado inferiormente* se existir um número $N \in K$ tal que $a \geq N, \forall a \in A$. O número N é chamado *minorante* ou *cota inferior* de A.

Definição. Se A for limitado superior e inferiormente, dizemos simplesmente que A é *limitado*. Nesse caso, existem M e N tais que $N \leq a \leq M, \forall a \in A$.

Conjuntos limitados

Exemplos:

1. No corpo ordenado $\mathbb{Q}$, o conjunto $A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$, formado pelos números primos entre 10 e 40, é limitado. Por quê?
   - Quantos majorantes e minorantes tem esse conjunto?
   - Qual é o menor dos majorantes?
   - Qual é o maior dos minorantes?
2. Todo conjunto finito (ou seja, com uma quantidade finita de elementos) é limitado. Por quê?
3. $B = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots \right\} \subset \mathbb{Q}$ é limitado?

Conjuntos limitados

4. $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$
   - C é limitado superiormente? Por quê?
   - C é limitado inferiormente? Por quê?
   - Existe o maior dos minorantes de C?
5. $D = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} \subset \mathbb{Q}$
   - D é limitado superiormente? Por quê?
   - D é limitado inferiormente? Por quê?