Matemática III - CCM
MAP0217 - Cálculo Integral
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

14/09/2020 - Não revisado!

1 Normas e semi-normas

1.1 Definições

Definição 1 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).*

Uma semi-norma em V é uma função

$$\| \ \| : V \to \mathbf{R}$$

satisfazendo as propriedades

(SN1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \ \forall v \in V.$

(SN2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V.$

(SN3) $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V.$

Definição 2 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).*

Uma norma em V é uma função

$$\| \ \| : V \to \mathbf{R}$$

satisfazendo as propriedades

(N1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \ \forall \lambda \in \mathbf{K}, \ \forall v \in V.$

(N2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V.$

(N3) $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V.$

(N4) Se $\|v\| = 0$ então $v = O$.

1.2 Exemplos de normas em $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ (V_2 e V_3 usuais)

Exemplo 1 Norma Euclidiana, ou Norma Dois, ou Norma Usual em $\mathbf{R}^2$ (V_2 usual)

Seja $V = \mathbf{R}^2$.

Para $x = (x_1, x_2) \in V$, definimos

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

Afirmação 1 *$\| \ \|$ é uma norma em V.*

Exemplo 2 Norma Euclidiana, ou Norma Dois, ou Norma Usual em $\mathbf{R}^3$ (V_3 usual)

Seja $V = \mathbf{R}^3$.

Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$, definimos

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}.$$

Afirmação 2 *$\| \ \|$ é uma norma em V.*

Exercício 1 *Prove as afirmações 1 e 2.*

Exemplo 3 Norma Um em $\mathbf{R}^2$

Seja $V = \mathbf{R}^2$.

Para $x = (x_1, x_2) \in V$, definimos

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

Afirmação 3 *$\| \ \|_1$ é uma norma em V.*

Exemplo 4 Norma Um em $\mathbf{R}^3$

Seja $V = \mathbf{R}^3$.

Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$, definimos

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

Afirmação 4 *$\| \ \|_1$ é uma norma em V.*

Exercício 2 *Prove as afirmações 3 e 4.*

Exemplo 5 Norma do Sup ou Norma Infinito em $\mathbf{R}^2$

Seja $V = \mathbf{R}^2$.

Para $x = (x_1, x_2) \in V$, definimos

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|\} = \max \{|x_1|, |x_2|\}.$$

Afirmação 5 *$\| \ \|_\infty$ é uma norma em V.*

Exemplo 6 Norma do Sup ou Norma Infinito em $\mathbf{R}^3$.

Seja $V = \mathbf{R}^3$.

Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$, definimos

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \max \{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}.$$

Afirmação 6 *$\| \ \|_\infty$ é uma norma em V.*

Exercício 3 *Prove as afirmações 3 e 4.*

1.3 Exemplos de normas em $\mathbf{R}^n$ (análogo p/ $\mathbf{C}^n$)

Exemplo 7 Norma euclidiana, ou norma usual, ou norma dois, em $\mathbf{R}^n$:

$\| \;\|_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |v_j|^2} = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2},$$

é uma norma sobre $\mathbf{R}^n$.

Exemplo 8 Norma do sup, ou norma infinito, em $\mathbf{R}^n$:

$\| \;\|_\infty : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|v\|_\infty \;:=\; \sup_{1\leq j\leq n} |v_j| = \max_{1\leq j\leq n} |v_j| = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\},$$

é uma norma sobre $\mathbf{R}^n$.

Exemplo 9 Norma um em $\mathbf{R}^n$:

$\| \;\|_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|v\|_1 := \sum_{j=1}^n |v_j| = |v_1| + \cdots + |v_n|,$$

é uma norma sobre $\mathbf{R}^n$.

1.4 Exemplos de normas em $C([a,b]), a < b$

Exemplo 10 Norma euclidiana, ou norma dois, em $C([a,b]), a < b$:

$\| \;\|_2 : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \;\; \forall f \in C([a,b]),$$

é uma norma sobre $C([a,b])$.

Notação: $C_{L_2}([a,b]) := (C([a,b]), \| \;\|_2)$.

Exemplo 11 Norma do sup, ou norma infinito, em $C([a,b]),\; a < b$:

$\| \;\|_\infty : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|, \;\; \forall f \in C([a,b]),$$

é uma norma sobre $C([a,b])$.

Notação: $C_{L_\infty}([a,b]) := (C([a,b]), \| \;\|_\infty)$.

Exemplo 12 Norma um em $C([a,b]),\; a < b$:

$\| \;\|_1 : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt, \;\; \forall f \in C([a,b]),$$

é uma norma sobre $C([a,b])$.

Notação: $C_{L_1}([a,b]) := (C([a,b]), \| \;\|_1)$.

Exemplo 13 Norma Dois *com peso*, em $C([a,b])$

Seja $V = C([a,b])$, e seja $\rho : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função estritamente positiva (função peso)

Para $f \in V$, definimos

$$\|f\|_{2,\rho} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \rho(t) dt}.$$

Afirmação 7 $\| \; \|_{2,\rho}$ é uma norma em V.

Exercício 4 Prove a afirmação 7

Exercício 5 Considere $V = C([a,b])$ com a Norma Um.

Quais são as funções que estão na bola de centro na origem e raio um? Dê uma idéia de como deve ser o gráfico de tais funções.

Exercício 6 Considere $V = C([a,b])$ com a Norma do Sup.

Quais são as funções que estão na bola de centro na origem e raio um? Dê uma idéia de como deve ser o gráfico de tais funções.

Exercício 7 Considere $V = C([a,b])$ com a Norma Euclidiana Usual.

Quais são as funções que estão na bola de centro na origem e raio um? Dê uma idéia de como deve ser o gráfico de tais funções.

1.5 Exemplos de normas em subespaços vetoriais de $C(\mathbf{R})$

Exemplo 14 Norma euclidiana, ou norma 2, no espaço vetorial das funções contínuas em $\mathbf{R}$, de quadrado integrável:

Seja $C_{L_2}(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid \exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\}$.

$\| \; \|_2 : C_{L_2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}, \ \forall f \in C_{L_2}(\mathbf{R}),$$

é uma norma sobre $C_{L_2}(\mathbf{R})$.

Exemplo 15 Norma do sup, ou norma infinito, no espaço vetorial das funções contínuas e limitadas de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$:

Seja $C_{L_\infty}(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid f \text{ é limitada}\}$.

$\| \|_\infty : C_{L_\infty}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|, \ \forall f \in C_{L_\infty}(\mathbf{R}),$$

é uma norma sobre $C_{L_\infty}(\mathbf{R})$.

Exemplo 16 Norma um no espaço vetorial das funções contínuas em $\mathbf{R}$, de módulo integrável:

Seja $C_{L_1}(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid \exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt\}$.

$\| \|_1 : C_{L_1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt, \ \forall f \in C_{L_1}(\mathbf{R}),$$

é uma norma sobre $C_{L_1}(\mathbf{R})$.

Observação 1 Note que $\| \|_2, \| \|_\infty$ e $\| \|_1$ dadas nos três últimos exemplos não são normas sobre $C(\mathbf{R})$. *(Por quê?)*

1.6 Exemplos de semi-normas

Exemplo 17 Seja $n \geq 2$.

$\| \| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|v\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} |v_j|^2} = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_{n-1}|^2},$$

é uma seminorma sobre $\mathbf{R}^n$.

Exemplo 18 Semi-normas relacionadas a funções tabeladas:

Sejam:
$a < b, \ V = C([a,b])$ ou $V = C(\mathbf{R})$, e
$t_1, t_2, \ldots, t_n$: pontos distintos dois a dois em $[a,b]$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [f(t_j)^2}, \ \forall f \in V, \\
\|f\|_\infty &= \sup_{1\leq j\leq n} |f(t_j)|, \ \forall f \in V, \\
\|f\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |f(t_j)|, \ \forall f \in V,
\end{aligned}$$

são semi-normas em sobre V.

1.7 Exemplos de normas no espaço $P_k(\mathbf{R})$ dos polinômios de grau $\leq k$

Exemplo 19 Subespaços especiais de $C(\mathbf{R})$:

As semi-normas $\| \ \|_2, \| \ \|_\infty$ e $\| \ \|_1$ em $V = C(\mathbf{R})$ definidas no exemplo anterior, quando restritas ao subespaço vetorial $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}) \subset C(\mathbf{R})$ dos polinômios de grau $\leq k$, são normas sobre $\mathcal{P}_k(\mathbf{R})$ se e somente se $k \leq n-1$.

Exemplo 20
Seja $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}) = \{p : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid p$ é "polinômio" de grau $\leq k\}$.

$\| \ \| : \mathcal{P}_k(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|p\| := \sup_{0 \leq j \leq k} \left| \frac{d^j p}{dx^j}(0) \right|, \ \forall p \in \mathcal{P}_k(\mathbf{R}),$$

é uma norma sobre $\mathcal{P}_k(\mathbf{R})$.

1.8 Exemplos de normas no espaço $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ das matrizes $m \times n$ com entradas reais

Exemplo 21 Seja $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$.
$\| \! | \ \| \! |_2, \| \! | \ \| \! |_\infty, \| \! | \ \| \! |_1 : V \to \mathbf{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}^2}, \ \forall A \in V, \\
\|A\|_\infty &= \sup_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|, \ \forall f \in V, \\
\|A\|_1 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|, \ \forall f \in V,
\end{aligned}$$

são semi-normas em sobre V.

1.9 Exemplos de normas no espaço $L(V, W)$ das transformações lineares de V em W

Exemplo 22 Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), de dimensão finita n e m respectivamente, com normas $\| \ \|_V$ e $\| \ \|_W$ respectivamente.

$\| \ \|_{L(V,W)} : L(V,W) \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|T\|_{L(V,W)} := \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|T(x)\|_W, \ \forall T \in L(V,W)$$

é uma norma em sobre $L(V,W)$.

Proposição 1 Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), de dimensão finita n e m respectivamente, com normas $\| \ \|_V$ e $\| \ \|_W$ respectivamente, e considere a norma $\| \ \|_{L(V,W)} : L(V,W) \to \mathbf{R}$ em $L(V,W)$ definida no exemplo anterior.

Esta norma satisfaz:

(i) $\|T(x)\|_W \leq \|T\|_{L(V,W)} \|x\|_V, \forall T \in L(V,W), \forall x \in V$.

(ii) Se $W = V$, então $\|I\|_{L(V,V)} = 1$.

(iii) Se $W = V$, e $S, T \in L(V,V)$ então $\|S \circ T\|_{L(V,V)} \leq \|S\|_{L(V,V)} \|T\|_{L(V,V)}$.

1.10 Mais exemplos de normas no espaço $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ das matrizes $m \times n$ com entradas reais

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ podemos associá-la de modo único a uma transformação linear $T_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definindo T_A da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_A(x) &= T_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \\ &:= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) \\ &= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n). \end{aligned}$$

Se fixarmos normas $\| \ \|_{\mathbf{R}^n}$ e $\| \ \|_{\mathbf{R}^m}$ em $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$ respectivamente, a associação anterior permite definir em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ a norma:

$$\|A\|_{L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)} := \|T_A\|_{L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)}, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R}),$$

e esta norma herda naturalmente propriedades análogas às mencionadas na proposição 1.

Observação 2 Frequentemente usaremos o seguinte abuso para vetores de $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$T_A(x) = (\textstyle\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

Com estas notações podemos escrever:

$$\|A\|_{L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)} = \sup_{\|x\|_{\mathbf{R}^n} \leq 1} \|Ax\|_{\mathbf{R}^m}, \ \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R}).$$

2 Formas Bilineares e Produto Interno

Definição 3 *Uma função*

$$B : V \times V \to \mathbf{R}$$

é dita uma forma bilinear se satisfaz as seguintes propriedades

(BL1) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w), \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \ \forall v, w \in V.$

(BL2) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w), \ \forall u, v, w \in V.$

(BL3) $B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w), \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \ \forall v, w \in V.$

(BL4) $B(v, w + z) = B(v, w) + B(v, z), \ \forall v, w, z \in V.$

Definição 4 *Seja* $B : V \times V \to \mathbf{R}$ *uma forma bilinear.*

(a) B *é dita simétrica se* $B(u, v) = B(v, u), \ \forall u, v \in V.$

(b) B *é dita antissimétrica, ou alternada, se* $B(u, v) = -B(v, u), \ \forall u, v \in V.$

(c) B *é dita positiva [negativa] se* $B(v, v) \geq 0$ $[B(v, v) \leq 0], \ \forall v \in V.$

(d) B *é dita definida positiva [definida negativa] se for positiva [negativa] e* $B(v, v) = 0$ *implicar que* $v = O$.

(e) B *é dita não degenerada se para cada* $v \in V, \ v \neq O,$ *existe* $u \in V$ *tal que* $B(u, v) \neq 0.$

Exercício 8 Seja $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear simétrica positiva.
Mostre que B é definida positiva se e só se B é não degenerada.

Exemplo 23 Seja $V = \mathbf{R}^n$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(x, y) = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$$
é uma forma bilinear simétrica definida positiva em V.

Exemplo 24 Seja $V = \mathbf{R}^2$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
é uma forma bilinear antissimétrica e não degenerada em V.

Exemplo 25 Seja $V = \mathbf{R}^n,\ n \geq 2$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(u, v) = \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i$$
é uma forma bilinear simétrica positiva em V, mas não é definida positiva.

Exemplo 26 Seja $V = C([a, b]),\ a < b$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(f, g) = \textstyle\int_a^b f(t)g(t)dt$$
é uma forma bilinear simétrica definida positiva em V.

Exemplo 27 Seja $V = C_{L_2}(\mathbf{R})$ ou $V = C(\mathbf{R})$, e $a < b$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(f, g) = \textstyle\int_a^b f(t)g(t)dt,$$
é uma forma bilinear simétrica positiva em V, mas não é definida positiva.

Exemplo 28 Sejam $a < b,\ V = C(\mathbf{R})$ ou $V = C([a, b])$, e
$t_1, t_2, \ldots, t_n$: pontos distintos dois a dois em $[a, b]$.
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por
$$B(f, g) = \textstyle\sum_{j=1}^n f(t_j)g(t_j),$$
é forma bilinear simétrica positiva em V, mas não é definida positiva.

Exemplo 29 Como no exemplo 28, considere
$a < b,\ V = C(\mathbf{R})$,
$t_1, t_2, \ldots, t_n$: pontos distintos dois a dois em $[a, b]$ e a forma bilinear
$B : V \times V \to \mathbf{R}$ definida por
$$B(f, g) = \textstyle\sum_{j=1}^n f(t_j)g(t_j).$$

Agora, para $k \geq 0$, considere o subespaço vetorial $V_k = \mathcal{P}_k(\mathbf{R})$ de V formado pelas funções polinomiais de grau $\leq k$.

A restrição

$$R := B|_{V_k \times V_k} : V_k \times V_k \to \mathbf{R}$$

da forma bilinear $B : V \times V \to \mathbf{R}$ do exemplo 28 é uma forma bilinear simétrica positiva em V, e é definida positiva se e somente se $k \leq n - 1$.

Exemplo 30 Seja $V = C_{L_2}(\mathbf{R})$.

$B : V \times V \to \mathbf{R}$ dada por

$$B(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt,$$

é forma bilinear simétrica definida positiva em V.

Exercício 9 Mostrar a validade de cada uma das afirmações contidas nos exemplos anteriores.

Definição 5 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$. Dizemos que*

$$\begin{array}{rccc} \langle \quad | \quad \rangle : & V \times V & \to & \mathbf{R} \\ & (u,v) & \to & \langle\ u \mid v\ \rangle \end{array}$$

é um produto interno (ou produto escalar) em V se for uma forma bilinear simétrica definida positiva em V.

Se $\langle \quad | \quad \rangle$ for uma forma quadrática simétrica positiva em V, mas não for definida positiva, diremos **neste texto** *que ela é um produto interno degenerado.*

Exercício 10 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$ e seja $B : V \times V \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear simétrica positiva (isto é, B pode ser um produto interno ou um produto interno degenerado).

Seja $\| \ \|_B : V \to \mathbf{R}$ definida por

$$\|v\|_B = \sqrt{B(v,v)},\ v \in V.$$

(a) Mostre que $\| \ \|_B$ é uma semi-norma.

(b) Mostre que $\| \ \|_B$ é uma norma se e só se B for definida positiva.

Definição 6 *No caso de B ser forma bilinear simétrica positiva, $\| \ \|_B : V \to \mathbf{R}$ definida no exercício anterior por*

$$\|v\|_B = \sqrt{B(v,v)},\ v \in V,$$

é dita semi-norma (ou norma, no caso de B ser definida positiva) associada a B.

Exercício 11 Para as formas bilineares simétricas positivas definidas em alguns dos exercícios anteriores, determine quem é a semi-norma associada, e decida em cada caso se ela é uma norma ou não.

Proposição 2 (Desigualdade de Cauchy-Shwarz)

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$ e seja $B : V \times V \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear simétrica definida positiva.

Então

$$|B(u,v)| \leq \|u\|_B \|v\|_B, \ \forall u, v \in V,$$

e vale a igualdade se e só se u e v são linearmente independentes.

Exercício 12 Prove a proposição 2.

Exercício 13 Vale a desigualdade de Cauchy-Shwarz se B simétrica positiva mas não definida positiva?

3 Para os curiosos:

3.1 Outras normas especiais

Seja $1 \leq p < \infty$.

(a) Em $V = \mathbf{R}^n$ podemos definir:

$$\|x\|_p = \Big[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \Big]^{1/p} = [|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p]^{1/p},$$

e

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

(b) Em $V = C([a,b]), \ a < b$ podemos definir:

$$\|f\|_p = \Big[\int_a^b |f(t)|^p dt \Big]^{1/p},$$

e

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

(c) Em $V = C_{L_p}(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty\}$ podemos definir:

$$\|f\|_p = \Big[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt\Big]^{1/p},$$

e em $V = C_{L_\infty}(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) \mid f \text{ é limitada }\}$ podemos definir:

$$\|f\|_p = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|.$$

Exercício 14 Mostre (ou melhor, tente mostrar) que se $1 \leq p < \infty$, o conjunto $C_{L_p}(\mathbf{R})$ definido no item (c) acima é um espaço vetorial.

Exercício 15 Mostre (ou melhor, tente mostrar) que em cada item acima, $\| \ \|_p$ e $\| \ \|_\infty$ são normas sobre os correspondentes espaços vetoriais.

3.2 Desigualdades de Holder e de Minkowisky

Seja $1 < p < \infty$. Dizemos que $p' \in \mathbf{R}$ é expoente conjugado de p se
$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Se $p = 1$, dizemos que $p' = \infty$ é seu expoente conjugado, e se $p = \infty$, dizemos que $p' = 1$ é seu expoente conjugado.

Note que se $p' = q$ então $q' = p$, isto é, $p'' = p$.

Lema *Seja $1 < p < \infty$, e sejam $a, b \in \mathbf{R}^+$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Teorema 1 Desigualdade de Holder

Sejam $1 \leq p, p' \leq \infty$ expoentes conjugados.

(a) Dados $x, y \in \mathcal{C}^n$ e denotando $xy = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$ temos $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p\|y\|_{p'}$,

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_jy_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'}\Big)^{1/p'},$$

quando $1 < p < \infty$, *e*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \Big) \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i|,$$

quando $p = 1$.

(b) *Dadas* $f, g \in C([a,b])$, $a < b$, *temos* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$,

ou seja,

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt \Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |g(t)|^{p'} dt \Big)^{1/p'},$$

quando $1 < p < \infty$, *e*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|dt \Big) \sup_{t \in [a,b]} |g(t)|,$$

quando $p = 1$.

Teorema 2 Desigualdade de Minkowisky
Seja $1 \leq p \leq \infty$.

(a) *Para quaisquer* $x, y \in \mathcal{C}^n$ *temos* $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$,

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|.$$

(b) *Para quaisquer* $f, g \in C([a,b])$, $a < b$, *temos* $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,

Exercício 16 Se você não conseguiu fazer os exercícios 14 e 15 sem as desigualdades de Holder e Minkowisky, refaça-os agora.

Exercício 17 Prove o teorema 1.
Sugestão: Para (a), use $a_j = \frac{|x_j|}{\|x_j\|_p}$ e $b_j = \frac{|y_j|}{\|y_j\|_{p'}}$, no caso em que $1 < p, p' < \infty$ e $x \neq O, y \neq O$. Para (b) use $a(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $b(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}$, no caso em que $1 < p, p' < \infty$ e $f \neq O, g \neq O$

Exercício 18 Prove o teorema 2.
Sugestão: No caso em que $1 < p < \infty$, no caso (a) notar que $|x_j + y_j|^p = |x_j + y_j|^{p-1}|x_j + y_j| \leq |x_j + y_j|^{p-1}|x_j| + |x_j + y_j|^{p-1}|y_j|$. Análogo para (b).