2020-2, "FISMAT-AV", AULA 06

OBJETIVO: APRESENTAR A EXPANSÃO FUNCIONAL DE TAYLOR

(CONT.) 1.3 DERIVADA FUNCIONAL

(CONT.) ... EXPANSÃO FUNCIONAL DE TAYLOR

A FUNÇÃO $f(\varepsilon) \equiv J(f+\varepsilon h)$ É UMA "SOMA DE FUNÇÕES ELEMENTARES",

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot \varepsilon^n ,$$

ONDE $f^{(n)}(0) = \left\{ \frac{d^n}{d\varepsilon^n} J(f+\varepsilon h) \right\}_{\varepsilon=0} \equiv \delta^n J(f,h)$

É A n-ÉSIMA DERIVADA DE GÂTEAUX.

PORÉM, GOSTARÍAMOS DE EXPRESSAR DIRETAMENTE UM FUNCIONAL

COMO UMA "SOMA DE FUNCIONAIS ELEMENTARES". TAL EXPRESSÃO É UMA FÓRMULA OU SÉRIE DE VOLTERRA. O QUE SABEMOS ATÉ A 1ª ORDEM?

$$J(f+\varepsilon h) = g(\varepsilon) \approx g(0) + \varepsilon . g'(0) =$$

$$= J(f) + \varepsilon [\delta J(f,h)]$$

$$= J(f) + \underbrace{\varepsilon \int dx . h(x)}_{\delta f(x)} . \frac{\delta J}{\delta f(x)}$$

OS TERMOS RESTANTES TÊM EXPRESSÕES INTEGRAIS? COMO OBTÊ-LAS? JÁ VIMOS, EM EXERCÍCIOS, QUE A DERIVAÇÃO FUNCIONAL COMPORTA-SE LINEARMENTE EM RELAÇÃO AOS FUNCIONAIS EM QUE ATUA. ORA, AQUELA LINEARIDADE É SIMPLESMENTE HERDADA DA DEFINIÇÃO DA DERIVADA DE

GÂTEAUX, COMO UM LIMITE. DE FATO, SE U FOR O <u>ESPAÇO</u> <u>VETORIAL</u> DOS FUNCIONAIS $J: A \to \mathbb{R}$ E FOREM FIXADAS UMA FUNÇÃO ADMISSÍVEL f E UMA VARIAÇÃO ADMISSÍVEL h, A ~~OPER~~ DERIVADA DE GÂTEAUX AGE COMO UM FUNCIONAL LINEAR EM U,

$$\delta \bullet (f, h) : U \to \mathbb{R}, \quad J \mapsto \delta J(f, h).$$

PORÉM, DADO J E "LIBERADA" f,

$$\delta J(\bullet, h) : A \to \mathbb{R}$$

É UM FUNCIONAL EM A, O ESPAÇO DAS FUNÇÕES ADMISSÍVEIS,

$$f \mapsto \delta J(f, h) = \int dx \, h(x) \frac{\delta J}{\delta f(x)}.$$

NA INTEGRAL, A DEPENDÊNCIA EM f ESTÁ TODA NA DERIVADA FUNCIONAL.

FORMALMENTE, IDENTIFICAMOS UM <u>OPERADOR</u> <u>LINEAR</u> EM U,

$$\begin{aligned} \delta\bullet(\bullet,h) : U &\to U\,, \\ J &\mapsto \delta J(\bullet,h)\,. \end{aligned}$$

O MESMO VALE, COM x FIXADO NO DOMÍNIO DOS ELEMENTOS DE A, PARA O OPERADOR DE DERIVAÇÃO FUNCIONAL

$$\begin{aligned} \frac{\delta\bullet}{\delta\bullet(x)} : U &\to U\,, \\ J &\mapsto \frac{\delta J}{\delta\bullet(x)}\,. \end{aligned}$$

TROCANDO EM MIÚDOS? CABEM INTERPRETAÇÕES PARA CHAMARMOS $\delta\bullet(f,h)$ E $\frac{\delta\bullet}{\delta f(x)}$ DE OPERADORES, QUE LEVAM FUNCIONAIS A FUNCIONAIS!

NO ENTANTO, A FUNÇÃO f DEVE SER "A ÚLTIMA A ENTRAR" — NÃO QUEREMOS ESCALARES "ANTES DA HORA CERTA".

EXPLICITAMENTE, PODEMOS ESCREVER A EQUAÇÃO DE OPERADORES

$$\boxed{\delta\cdot(\cdot,h) = \int dx\, h(x) \frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x)}}$$

OU A EQUAÇÃO FUNCIONAL

$$[\delta\cdot(\cdot,h)](J) = \delta J(\cdot,h) = \int dx\, h(x) \boxed{\frac{\delta J}{\delta\cdot(x)}},$$

$$\boxed{\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x)}\right](J)}$$

DE MODO QUE

COMPOSIÇÃO DE OPERADORES

$$[\delta\cdot(\cdot,h)]^2 \equiv [\delta\cdot(\cdot,h)]\circ[\delta\cdot(\cdot,h)] =$$

$$= \iint dx_1\, dx_2\, h(x_1)\, h(x_2) \boxed{\frac{\delta^2\cdot}{\delta\cdot(x_1)\,\delta\cdot(x_2)}}.$$

$$/\!/\!/ \quad \boxed{\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x_1)}\right]\circ\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x_2)}\right]}$$

DESSA FORMA,

$$f''(0) = \delta^2 J(f, h) = \{[\delta\cdot(\cdot, h)]^2(J)\}(f) =$$

$$= \iint dx_1 dx_2\, h(x_1) h(x_2) \boxed{\frac{\delta^2 J}{\delta f(x_1)\, \delta f(x_2)}}$$

$$\equiv$$

$$\left\{\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x_1)}\right] \circ \left[\frac{\delta\cdot}{\delta\cdot(x_2)}\right](J)\right\}(f)$$

E ENTENDEMOS, FINALMENTE, O TERMO DE 2ª ORDEM $\frac{\varepsilon^2}{2!} f''(0)$ DA EXPANSÃO DE $J(f + \varepsilon h)$. POR FIM, MEDIANTE COM-POSIÇÕES DE ORDENS SUPERIORES DOS OPERADORES AQUI DEFINIDOS, COM $\delta f(x_i) \equiv \varepsilon . h(x_i)$,

$$\boxed{J(f + \delta f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n\, \delta f(x_1) \ldots \delta f(x_n) \cdot \frac{\delta^{(n)} J}{\delta f(x_1) \ldots \delta f(x_n)}}$$

INVARIANTE POR PERMUTAÇÕES

EXERCÍCIO

SE CADA $K_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FOR INVARIANTE POR PERMUTAÇÕES DOS SEUS ARGUMENTOS, MOSTRE QUE

$$K_n(x_1, \ldots, x_n) = \left. \frac{\delta^{(n)} Z}{\delta f(x_1) \ldots \delta f(x_n)} \right|_{f=0}$$

NO FUNCIONAL

$$Z(f) = \overset{\text{CTE}}{\overset{\uparrow}{K_0}} + \int \frac{dx_1}{1!} K_1(x_1) f(x_1) +$$

$$+ \iint \frac{dx_1\, dx_2}{2!} K_2(x_1, x_2) f(x_1) . f(x_2) + \ldots +$$

$$+ \int \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{n!} K_n(x_1, \ldots, x_n) f(x_1) \ldots f(x_n) +$$

$$+ \ldots \quad .$$