2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 01 E 02

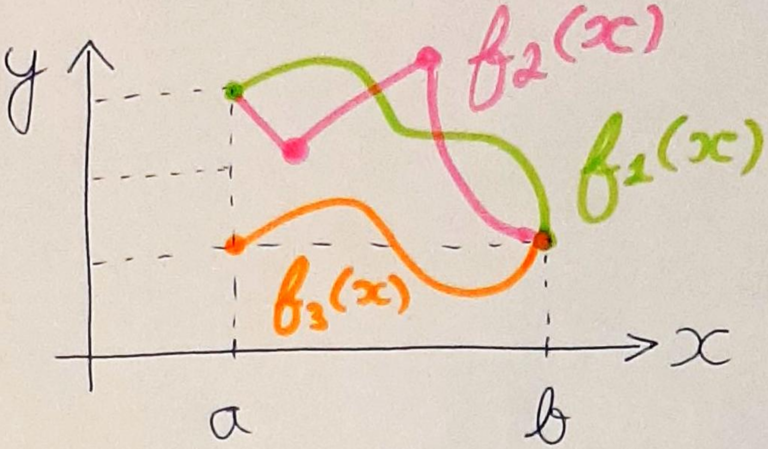
OBJETIVOS: INTRODUZIR ELEMENTOS DO CÁLCULO VARIACIONAL

1. CÁLCULO VARIACIONAL

1.1 FUNCIONAIS

NO CÁLCULO BÁSICO, UM PONTO x_0 DE UM INTERVALO ABERTO I NO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO REAL f DE UMA VARIÁVEL É UM <u>MÍNIMO LOCAL</u> SE $f(x_0) \leq f(x)$ PARA QUALQUER x "<u>PRÓXIMO</u>" DE x_0, $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$, PARA ALGUM $\delta > 0$. SE f FOR DIFERENCIÁVEL, UMA CONDIÇÃO <u>NECESSÁRIA</u> É $f'(x_0) = 0$.

QUEREMOS GENERALIZAR ESSE PROBLEMA PARA OBTERMOS EXTREMOS DE FUNCIONAIS, COMO O COMPRIMENTO DE UMA CURVA. OS 3



CASOS ACIMA PODEM SER ANALISADOS COM

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

MAS VÁRIAS PERGUNTAS NOS ASSOMBRAM. PODERIA HAVER MAIS FUNÇÕES CANDIDATAS? INFINITAS? LIMITADAS OU NÃO? DIFERENCIÁVEIS? UM PROBLEMA "BEM POSTO" EXIGE UMA ESCOLHA APROPRIADA DE UM

ESPAÇO A DE FUNÇÕES ADMISSÍVEIS E UM FUNCIONAL J, MAIS DO QUE UMA REGRA QUE ASSOCIA UM NÚMERO REAL A UMA FUNÇÃO QUALQUER $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, DEVE SER VISTO EM RELAÇÃO A A,

$$\boxed{J: A \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto J(f).}$$

PORÉM, PRECISAMOS DE MAIS FERRAMENTAS PARA CARACTERIZAR, POR EXEMPLO, O MÍNIMO DE UM FUNCIONAL. PODEMOS IMAGINAR $J(f_0) \leq J(f)$, MAS QUEM SÃO AS "OUTRAS" FUNÇÕES f "PRÓXIMAS" DE f_0? QUANDO DUAS FUNÇÕES "SÃO PRÓXIMAS"?

1.2 ESPAÇO DAS FUNÇÕES ADMISSÍVEIS, A

RESPOSTA DIRETA: A DEVE SER UM SUBESPAÇO ~~LINEA~~ DE UM ESPAÇO LINEAR NORMADO, V.

TIPICAMENTE, ESTAMOS FALANDO EM UM ESPAÇO DE FUNÇÕES, UM ESPAÇO VETORIAL CUJOS ELEMENTOS SÃO FUNÇÕES QUE PODEM SER ADICIONADAS,

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

E MULTIPLICADAS POR ESCALARES,

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ALÉM DISSO, TAL ESPAÇO DEVE SER MUNIDO DE UMA NORMA $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}^+$, TAL QUE

(i) $\|u\| = 0 \iff u = 0, \quad u \in V,$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| . \|u\|$ E

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

TAMBÉM TIPICAMENTE, V TEM DIMENSÃO INFINITA E É NECESSÁRIO QUE ELE SEJA COMPLETO (GROSSO MODO, "LIMITES PERMANECEM EM V"), DE MODO QUE FALAMOS EM ESPAÇOS DE BANACH. COMO NORMAS SÃO INDUZIDAS POR PRODUTOS INTERNOS, PODEMOS TAMBÉM CONSIDERAR A COMO UM SUBESPAÇO DE UM ESPAÇO DE HILBERT.

◇ EXEMPLOS (DE NORMAS)

i. EM $\mathbb{R}^n$, SE $u = (u^1, \dots, u^n)$, $\|u\| = \sqrt{(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2}$.

ii. EM $\mathbb{R}^n$, $\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} |u^i|$

iii. NO ESPAÇO $C[a,b]$ DE TODAS AS FUNÇÕES CONTÍNUAS EM $[a,b]$,

A NORMA FORTE

$$\|f\|_M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

MAX

E A NORMA L^1

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

SÃO POPULARES.

iv. NO ESPAÇO $C^1[a,b]$ DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS EM $[a,b]$ COM DERIVADAS CONTÍNUAS, É IMPORTANTE A NORMA FRACA

$$\|f\|_w = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

WEAK

v. DUAS FUNÇÕES EM $C^1[a,b]$ PODEM SER "PRÓXIMAS" NA NORMA FORTE, MAS NÃO NA FRACA...

$d(f_1,f_2) = \|f_1 - f_2\|$

1.3 DERIVADA FUNCIONAL

O ESPAÇO A DAS FUNÇÕES ADMISSÍVEIS HERDA, POR RESTRIÇÃO, A NORMA DO ESPAÇO DE BANACH V DO QUAL É UM SUBESPAÇO. ASSIM, SE $J: A \to \mathbb{R}$ FOR UM FUNCIONAL EM $A \subseteq V$, E V TIVER A NORMA $\|\cdot\|$, UMA FUNÇÃO $f_0 \in A$ PODE SER UM MÍNIMO LOCAL DE J SE $J(f_0) \leq J(f)$ PARA QUALQUER $f \in A$ TAL QUE $\|f - f_0\| < d$, PARA ALGUM $d > 0$.

É MUITO CONVENIENTE DEFINIR UMA FUNÇÃO REAL DE UM PARÂMETRO REAL ε,

$$\boxed{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \varepsilon \mapsto g(\varepsilon) \equiv J(f + \varepsilon . h)},$$

PARA QUAISQUER $f \in A$, E $h \in V$

ε SUFICIENTEMENTE PEQUENO PARA QUE $f+\varepsilon . h \in A$. NOTE QUE h, POR SI SÓ, NÃO PRECISA SER ADMISSÍVEL!

A FUNÇÃO g EXPRESSA MAIS CLARAMENTE A CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA QUE POSSAMOS "OTIMIZAR" J.

PARA SERMOS HONESTOS, É PRECISO RECONHECER QUE AS DIFERENTES NORMAS SÃO RELEVANTES APENAS NA DISCUSSÃO DAS CONDIÇÕES SUFICIENTES DOS EXTREMOS...

O FUNCIONAL J É ESTACIONÁRIO EM $f_0 \in A$ E f_0 É UM EXTREMO DE J SE $\boxed{g'(0)=0}$ PARA QUALQUER $h \in V$ TAL QUE $f_0+\varepsilon h \in A$ E,

CLARO, $\boxed{g(\varepsilon) \equiv J(f_0 + \varepsilon h)}$. COMO

CALCULAMOS $g'(0)$? ORA, É CLARO

QUE

$$g'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta g(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(f + \varepsilon h) - J(f)}{\varepsilon} = \left[\frac{d}{d\varepsilon} J(f + \varepsilon h) \right]_{\varepsilon = 0}.$$

DEFINIMOS A DERIVADA DE GÂTEAUX (OU DIFERENCIAL DE GÂTEAUX, OU AINDA PRIMEIRA VARIAÇÃO) DE J, EM f, NA DIREÇÃO DE h, COMO

$$\boxed{\delta J(f, h) \equiv g'(0) \equiv \left[\frac{d}{d\varepsilon} J(f + \varepsilon h) \right]_{\varepsilon = 0}}.$$

TRATA-SE DE UMA DERIVADA DIRECIONAL GENERALIZADA. MUITAS VEZES, MAS NEM SEMPRE, ELA COINCIDE COM A DERIVADA DE FRÉCHET (QUE É UMA GENERALIZAÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA DE FUNÇÕES $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).

PORTANTO, CANDIDATOS A EXTREMOS DE FUNCIONAIS $\mathcal{J}$ DIFERENCIÁVEIS ANULAM A DERIVADA DE GÂTEAUX PARA QUAISQUER $h \in V$, E É ASSIM QUE OS MATEMÁTICOS TRABALHAM. PORÉM, "NA PRÁTICA", SERIA CONVENIENTE NÃO HAVER PREOCUPAÇÃO "COM QUAISQUER h's". ALÉM DISSO, MUITOS FUNCIONAIS SÃO CONSTRUÍDOS MEDIANTE EXPRESSÕES INTEGRAIS, COMO O PRINCÍPIO DE MÍNIMA

AÇÃO DE HAMILTON, PELO QUAL A TRAJETÓRIA DE UMA PARTÍCULA DESLOCANDO-SE DE $x_1 = a$ ATÉ $x_2 = b$ É AQUELA QUE MINIMIZA A AÇÃO

$$S(y) = \int_a^b dx \, L(x, y(x), y'(x)),$$

ONDE L É O LAGRANGIANO. DADO ESSE CONTEXTO, FÍSICOS QUASE SEMPRE BUSCAM EXTREMOS AO ANULAREM A DERIVADA FUNCIONAL (OU DERIVADA VARIACIONAL) DEFINIDA IMPLICITAMENTE COMO A "EXPRESSÃO"

$$\boxed{\frac{\delta J}{\delta f(x)}} \text{ TAL QUE } \left[\frac{d}{d\epsilon} J(f+\epsilon h)\right]_{\epsilon=0} = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, h(x) \frac{\delta J}{\delta f(x)}$$

PARA QUALQUER $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DE CLASSE C^∞ QUE SE ANULE NA FRONTEIRA DA REGIÃO DE INTEGRAÇÃO.