# [4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

PRO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

## PRO3252
## Automação e Controle

Mauro de Mesquita Spinola
Marcelo Schneck de Paula Pessôa
EPUSP-PRO

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

1

## As perguntas de hoje

- Como representar matematicamente sistemas dinâmicos?

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 2

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

2

# [4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

| Aula | Conteúdo | Itens |
|---|---|---|
| Aula 1 | Transformadas de Laplace | 4.1, 4.2 |
| Aula 2 | Modelagem matemática de sistemas dinâmicos | 4.3 |
| Aula 3 | Transformadas de Laplace de controladores automáticos | 4.4, 4.5, 4.6 |

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 3

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

3

# [4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

## Esta aula

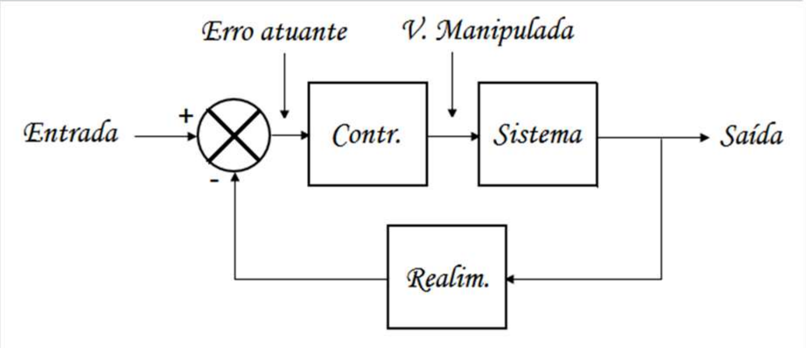
- Transformadas de Laplace
- Propriedades da Transformada de Laplace
- Transformada inversa de Laplace
- *Exercícios*

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 4

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

4

# Contexto




set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 5

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

5

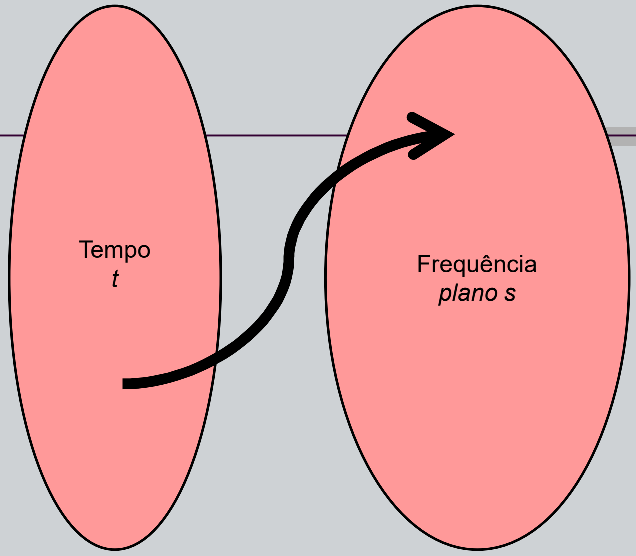
4.2

# A TRANSFORMADA DE LAPLACE

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 6

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

6




mapeamento de espaços



7

# Base Matemática – Transformada de Laplace

- **Método operacional que pode ser usado para solução de sistemas de equações diferenciais lineares.**
- **Características da Transformada de Laplace:**
  - Operações como diferenciação e integração podem ser substituídas por **operações algébricas** no plano complexo.
  - A solução da equação diferencial (ED) pode ser encontrada através de uma **tabela de transformadas de Laplace** ou pelo uso de técnicas de expansão em frações parciais.
- **Vantagens:**
  - Permite o uso de **técnicas gráficas** para prever o desempenho de um sistema sem necessidade de resolução do sistema de EDs.



8

# Breve revisão sobre variáveis complexas

- **Seja *s* uma variável complexa, que pode ser representada como a soma de uma componente real mais uma componente complexa, na forma:**

$$s = \sigma + j\omega$$

Considere a figura 1 que se segue, ilustrando o plano *s* e um ponto representativo

$s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$

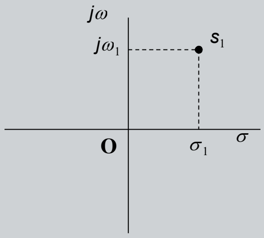



Fig. 1 Plano *s* e um ponto representativo



9

# Breve revisão sobre variáveis complexas

Seja uma função *G* de *s*, com uma parte real e uma parte imaginária, dada por

$G(s) = G_x + jG_y$ onde $G_x$ e $G_y$ reais

Considere o plano complexo mostrado na figura 2 onde é ilustrado o ângulo θ de ($G_x$+$G_y$), *G* e suas componentes. O ângulo θ é medido a partir do eixo real positivo e é dado por

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

Uma rotação anti-horária é definida como a direção positiva para fins de medição de ângulos.

O módulo da grandeza complexa ($G_x$+$jG_y$) é dado por

$$\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

Plano *G(s)*

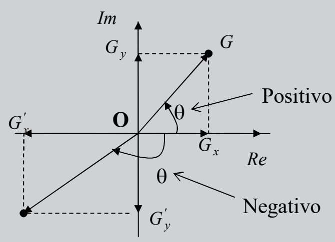



Fig. 2 Plano complexo e duas grandezas complexas representativas



10

# A Transformada de Laplace

Considere as definições:

$f(t)$ é uma função do tempo tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$
$s$ é uma variável complexa

A transformada de Laplace de $f(t)$ é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

O processo inverso, para achar a f(t) da transformada de Laplace é dado por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 11

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

11

# A Transformada de Laplace

Transformadas de Laplace para algumas funções encontradas com frequência

***Exemplo* 1** – Considere a ***função exponencial***

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{Para } t < 0 \\ Ae^{-\alpha . t} & \text{Para } t \geq 0 \end{cases}$$

Onde A e $\alpha$ são constantes. A transformada de Laplace de *f(t)* é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty Ae^{-\alpha . t}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}dt$$

*cuja solução é* $\frac{A}{s-\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^\infty$ *ou seja*

$$F(s) = \frac{A}{s+\alpha}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 12

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

12

# A Transformada de Laplace

**Exemplo 2 – Função degrau**
*Considere a seguinte função degrau*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ A & para \quad t > 0 \end{cases}$$

A transformada de Laplace é $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = \frac{A}{s}$

Para $A = 1$ a função degrau é chamada função *degrau unitário*, ocorrendo em $t = t_0$ é frequentemente representada por $u(t-t_0)$ ou $1(t-t_0)$.

A função degrau de amplitude A pode ser escrita como $A.1(t-t_0)$. *A transformada de Laplace da função degrau unitário que é definida por*

$$1(t) = \begin{cases} 0 & para \; t < 0 \\ 1 & para \; t > 0 \end{cases}$$

é dada por $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$

Significado físico de uma função degrau em $t = 0$: corresponde a um sinal constante aplicado subitamente ao sistema no instante t=0.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 13

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

13

# A Transformada de Laplace

**Exemplo 3 – *Função rampa***
*Considere a seguinte função rampa:*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ At & para \quad t \geq 0 \end{cases} \quad onde \;\; A \; é \; uma \;\; constante$$

A sua transformada de Laplace é dada por (integrando por partes)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = A\int_0^{\infty} te^{-st}dt = At\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-st}}{-s}dt = \frac{A}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \frac{A}{s^2}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 14

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

14

# A Transformada de Laplace



**Exemplo 4 – Função senoidal**

*Considere a seguinte função senoidal:*

$$f(t)=\begin{cases}0 & \textbf{para } t<0\\ A\,sen(\omega t) & \textbf{para } t\geq 0\end{cases}$$

Como

$$e^{j\omega t} = \cos\ \omega t + jsen\ \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\ \omega t - jsen\ \omega t$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2\,jsen\ \omega t$$

$$sen\ \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

*Portanto a transforma da de Laplace pode ser escrita na forma*

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{A}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt = \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

Similarmente a transformada de Laplace para $f(t)=A\cos(\omega t)$ fornece

$$\mathcal{L}\left[A\cos(\omega t)\right] = \frac{As}{s^2+\omega^2}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 15

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

15

## Quadro de transformadas de Laplace

| | Função f(t) | Transformada de Laplace F(s) = $\mathcal{L}$[f(t)] |
|---|---|---|
| 1. | δ(t)<br>Impulso unitário (Delta de Dirac) | 1 |
| 2. | 1(t) ou u(t)<br>Degrau unitário | $\frac{1}{s}$ |
| 3. | t<br>Rampa unitária | $\frac{1}{s^2}$ |
| 4. | $t^n$<br>(n inteiro positivo) | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 5. | $e^{-at}$<br>Exponencial | $\frac{1}{s+a}$ |
| 6. | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 7. | $t^ne^{-at}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| 8. | sen ωt | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 9. | cos ωt | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 10. | $e^{-at}$ sen ωt | $\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 11. | $e^{-at}$ cos ωt | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 12. | t sen ωt | $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 13. | t cos ωt | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |

set-20 Maur

Escola Politécnica da Universidade de

16

# Exercícios

- Obter a transformada de Laplace das seguintes funções:
  a. f(t) = 5
  b. f(t) = 5t
  c. f(t) = $5e^{-4t}$
  d. f(t) = 5 sen(3t)



17

# Propriedades da Transformada de Laplace

- 1.Linearidade ou homogeneidade
- 2.Aditividade
- 3.Translação no tempo
- 4.Derivação real
- 5.Integração real
- 6.Teorema do valor inicial
- 7.Teorema do valor final
- 8.Derivação complexa
- 9.Multiplicação pela função exponencial
- 10.Mudança de escala no tempo



18

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ 1.Linearidade ou homogeneidade

Seja uma constante independente de *s* e de *t* e seja *f(t)* transformável. Então

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] = \alpha F(s)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 19

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

19

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ 2.Aditividade

Se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são ambas transformáveis, aplica-se o princípio da superposição

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \pm \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 20

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

20

# Propriedades da Transformada de Laplace

## 3.Translação no tempo

**Função transladada: Seja a transformada transladada de Laplace** ***f(t-α)1(t- α)***
***onde*** $\alpha \geq 0$

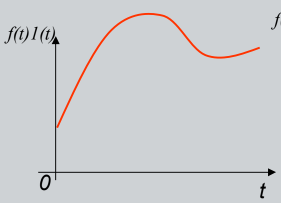



Fig. 3 - Função *f(t)*

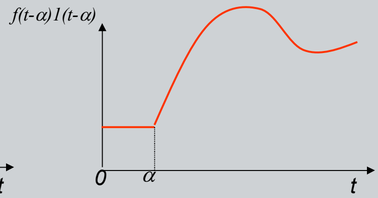



Fig. 4 - Função *f(t-α)*

Seja $f(t) = 0$ para $t < 0$ e $f(t-\alpha) = 0$ para $t < \alpha$, representadas nas duas figuras acima

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 21

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

21

Propriedades da Transformada de Laplace

## 3.Translação no tempo (cont.)

$$\int_0^\infty f(t-\alpha)1(t-\alpha)e^{-st}dt = \int_{-\alpha}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau$$

Como $f(\tau)1(\tau)=0$ para $\tau<0$, podemos trocar o limite inferior de integração de $-\alpha$ para 0

$$\int_{-\alpha}^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha}d\tau = e^{-\alpha s}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$$

**Esta equação mostra que a translação de *f(t)* de um valor de α unidades é equivalente multiplicar *F(s)* por** $e^{-\alpha s}$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 22

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

22

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ Exemplo: Função Pulso

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{t_0} & Para \;\; 0 < t < t_0 \\ 0 & Para \;\; t < 0 \;\; e \;\; t_0 < t \end{cases}$$

onde A e $t_0$ são constantes. A função pulso aqui pode ser considerada uma função degrau de altura $A/t_0$ começando em $t=t_0$. Matematicamente:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$$

A transformada de Laplace de f(t) é obtida como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}(t - t_0)\right] = \frac{A}{st_0} - \frac{A}{st_0} e^{-st_0} = \frac{A}{st_0}(1 - e^{-st_0})$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 23

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

23

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ Exemplo: Função Impulso

**Trata-se de um caso limite especial de uma função pulso**

$$f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t_0 \to 0} \dfrac{A}{t_0} & Para \;\; 0 < t < t_0 \\ 0 & Para \;\; t < t_0 \, , \; t_0 < t \end{cases}$$

Como a amplitude da função impulso é $\frac{A}{t_0}$ e a duração é $t_0$ a área sob o impulso é igual a $A$. Como a duração $t_0$ tende a $0$, a altura $\frac{A}{t_0}$ tende ao infinito. O tamanho de um impulso é medido pelo sua área.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 24

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

24

# Propriedades da Transformada de Laplace

## Exemplo: Função Impulso (cont.)

A transformada de Laplace da função impulso *f(t)* pode ser obtida como se segue

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_0 \to 0} \tfrac{A}{t_0 s}\left(1-e^{-st_0}\right) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{\frac{d}{dt_0}\left(A\left(1-e^{-st_0}\right)\right)}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)} = \frac{As}{s} = A$$

Portanto: a transformada de Laplace da função impulso é área sob o impulso. A função impulso cuja $A=1$ denomina-se impulso unitário ou função delta de Dirac. A função impulso unitário, ocorrendo em $t = t_0$, é normalmente indicada por $\delta(t-t_0)$ e satisfaz as seguintes condições:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & para\ \ t \neq t_0 \\ \infty & para\ \ t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$$



// Propriedades da Transformada de Laplace

## 4.Derivação real

Se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)* e se a primeira derivada de *f(t)* com relação ao tempo *Df(t)* é transformável, então

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0^+)$$

Demostrando, considere:
$$\begin{cases} du = \dfrac{d}{dt} f(t)dt \rightarrow u = f(t) \\ dv = e^{-st}dt \rightarrow v = \dfrac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}[Df(t)]\frac{e^{-st}}{-s}dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} Df(t)e^{-st}dt$$

*Note que* $\int_0^{\infty} Df(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[Df(t)]$ *portanto* $\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0)$

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ Derivação real (cont.)

A transformada da derivada segunda $D^2f(t)$ é

$\mathcal{L}[D^2f(t)] = s^2F(s)\text{-}sf(0)\text{-}Df(0)$

onde $Df(0)$ é valor do limite da derivada de $f(t)$ quando a origem $t=0$ é aproximada pela direita. Para demonstrar este caso considere a definição

$$Df(t)=g(t) \quad \textit{portanto} \quad D^2f(t)=Dg(t)$$

$$\mathcal{L}[g(t)]=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = g(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty Dg(t)e^{-st}dt \quad \textbf{\textit{ou seja}}$$

$$\mathcal{L}[Dg(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[Df(t)] - Df(0) \quad \textbf{\textit{e como}}$$

$$\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0) \quad \textbf{\textit{tem - se}} \quad \mathcal{L}\left[D^2f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - Df(0)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 27

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

27

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ Derivação real (cont.)

De forma similar obtém-se a transformada da derivada de ordem $n$, $D^nf(t)$:

$$\mathcal{L}\left[D^n f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sD^{n-2}f(0) - D^{n-1}f(0)$$

Nota: A transformada inclui as condições iniciais, enquanto que no método clássico as condições iniciais são introduzidas separadamente a fim de se calcular os coeficientes da solução da ED. A demonstração segue a mesma linha da demonstração anterior.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 28

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

28

# Propriedades da Transformada de Laplace

## 5.Integração real

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, sua integral é transformável:

$$\mathcal{L}\left[D^{-1}f(t)\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{D^{-1}f\left(0^{+}\right)}{s}$$

O termo $D^{-1}f(0^{+})$ é igual ao valor da integral na origem, aproximada pela direita

Demonstração:

$$du=\int\frac{d}{dt}f(t)dt\rightarrow \boldsymbol{u}=f(t);\ dv=e^{-st}\boldsymbol{dt}\rightarrow\ v=\frac{e^{-st}}{-s}$$

$$\mathcal{L}\left[D^{-1}f(t)\right]=\int_0^{\infty}\left[D^{-1}f(t)\right]e^{-st}dt=\left[D^{-1}f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt=$$

$$=\frac{1}{s}D^{-1}f(t)\Big|_{t=0}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\frac{F(s)}{s}+\frac{D^{-1}f(0)}{s}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 29

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

29

# Propriedades da Transformada de Laplace

## Integração real (cont.)

A transformada da integral envolvendo derivada de segunda ordem é

$$\mathcal{L}\left[D^{-2}f(t)\right]=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{D^{-1}f(0)}{s^2}+\frac{D^{-2}f(0)}{s}$$

Para a integral envolvendo derivadas de ordem $n$

$$\mathcal{L}\left[D^{-n}f(t)\right]=\frac{F(s)}{s^n}+\frac{D^{-1}f(0)}{s^n}+\cdots+\frac{D^{-n}f(0)}{s}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 30

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

30

# Propriedades da Transformada de Laplace

## 6.Teorema do valor inicial

Este teorema permite achar o valor de f(t) em t = $0^+$. Se a função f(t) e sua primeira derivada são transformáveis, se a transformada de Laplace de f(t) é F(s), e se

$\lim_{s\to\infty} sF(s)$ *existir, então*

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Este teorema estabelece que o comportamento de *f(t)* nas vizinhanças de *t=0* está relacionado com o comportamento de *sF(s)* nas vizinhanças de |*s*| = ∞. Não há limitações quanto aos polos de *sF(s)*. Provando o teorema:

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Neste intervalo, quando s→∞ Portanto:

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 31

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

31

# Propriedades da Transformada de Laplace

## 7.Teorema do valor final

Se *f(t)* e *Df(t)* admitem transformada de Laplace, se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)* e se existe o limite de *f(t)* quando *t*→∞, ou seja

$\lim_{t\to\infty} f(t)$ *existir, então*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Este teorema estabelece que o comportamento de *f(t)* nas vizinhanças de *t* = ∞ está relacionado com o comportamento de *sF(s)* nas proximidades de s = 0. Assim é possível é possível obter o valor de f(t) em igual infinito diretamente de F(s). Se *F(s)* possui polos (valores de s para os quais *F(s)* se torna infinito) sobre o eixo imaginário ou no semiplano s da direita, não existe valor final de *f(t)* e o teorema não pode ser aplicado.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 32

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

32

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ 8.Derivação complexa

**Se a transformada de Laplace de *f(t)* é *F(s)*, então** $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$

**A multiplicação por *t* no domínio real implica a derivação com relação a *s* no domínio de *s***

**Exemplo**

$$f(t) = e^{-\alpha t}$$

$$\mathrm{L}[tf(t)] = \frac{d}{ds}\mathrm{L}\left[e^{-\alpha t}\right] = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 33

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

33

# Propriedades da Transformada de Laplace

## ❑ 9.Multiplicação pela função exponencial

Se f(t) é transformável por Laplace, com sua transformada sendo F(s), então a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt = F(s+\alpha)$$

A multiplicação de *f(t)* por $e^{-\alpha t}$ tem o efeito de substituir *s* por $s+\alpha$ . Esta relação é útil para se determinar a transformada de Laplace de funções do tipo $e^{-\alpha t}$ *sen*$\omega t$ e $e^{-\alpha t}$ *cos*$\omega t$ como mostrado a seguir

$$\mathcal{L}[sen(\omega t)] = \int_0^\infty sen(\omega t) e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)$$

Considere agora $e^{-\alpha t}$ *sen*$\omega t$

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} sen(\omega t)\right] = \int_0^\infty sen(\omega t) e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} = F(s+\alpha)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 34

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

34

# Propriedades da Transformada de Laplace

## 10.Mudança de escala no tempo

Às vezes numa análise de sistemas físicos ou análise dinâmica muda-se a escala de tempo ou normaliza-se uma dada função do tempo. O resultado normalizado é importante porque pode ser aplicado a diferentes sistemas desde que tenham modelos matemáticos similares. Considere a mudança de escala no tempo dada por

$t$ *para* $\frac{t}{\alpha}$ Então f(t) pode ser escrito em termos da nova escala de tempo de modo que

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st}dt \quad \textbf{Seja} \ \frac{t}{\alpha}=t_1 \rightarrow t=\alpha t_1 \quad \alpha s=s_1 \quad \textbf{então}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}d(\alpha t_1)=\alpha\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}dt_1 \ =\alpha F(s_1) \ \textbf{ou}$$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\alpha F(\alpha s)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 35

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

35

# Propriedades da Transformada de Laplace

## Mudança de escala no tempo (cont.)

Considere o exemplo

$$f(t)=e^{-t} \quad \textit{com a mudança de escala} \quad f\left(\frac{t}{5}\right)=e^{-0.2t}$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}\left[e^{-t}\right]=F(s)=\frac{1}{s+1}$$

Portanto

Note: $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]=\alpha F(\alpha s)$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{5}\right)\right]=\mathcal{L}\left[e^{-0.2t}\right]=5F(5s)=\frac{5}{5s+1}$$

Este resultado pode ser verificado fazendo-se a transformada de $e^{-0.2t}$

$$\mathcal{L}\left[e^{-0.2t}\right]=\frac{1}{s+0.2}=\frac{5}{5s+1}$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 36

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

36

# Transformada inversa de Laplace

O processo de passar de uma expressão com variáveis complexas para o domínio do tempo é chamada transformação inversa e é denotada por $\mathcal{L}^{-1}$. Matematicamente

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad , t > 0$$

Matematicamente f(t) é determinada a partir de F(s) pela expressão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

Onde c é a abscissa de convergência, real, escolhida com valor real maior do que as partes reais de todos os pontos singulares de *F(s)*. A integração da equação acima é complicada. Se a F(s) estiver disponível numa tabela de transformadas é fácil determinar *f(t)*. Caso contrário tem-se que usar métodos de expansão para achar *f(t)*



# Transformada inversa de Laplace

Método de expansão em frações parciais para determinar transformada inversa de Laplace. Separando a *F(s)* em componentes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

Se as $F_i(s)$ são conhecidas então

$$\mathcal{L}[F(s)] = \mathcal{L}^{1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{n}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

onde as $f_i$ são transformadas inversas das $F_i(s)$. Para problemas em controle F(s) é frequentemente representada na forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

# Transformada inversa de Laplace

**Considerações sobre os polinômios** *A(s)* **e** *B(s)*

- O grau de *B(s)* não é maior do que o grau de *A(s)*.
- E necessário conhecer de antemão as raízes de *A(s)* para se aplicar o método (o método não é aplicado enquanto o denominador não for fatorado).
- A vantagem do método é que as $F_i(s)$ são funções muito simples de *s*. Considere F(s) escrito na forma fatorada:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Onde os $p_i$ $z_i$ são grandezas reais ou complexas.

- É importante que a maior potência de *s* em *A(s)* seja maior do que a maior potência de *s* em *B(s)*.
- Caso o grau de s em *A(s)* não satisfaça a condição acima deve-se dividir os polinômios.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 39

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

39

# Transformada inversa de Laplace

## ❑ Expansões em frações parciais quando F(s) tem apenas polos distintos

Se os polos são distintos F(s) pode sempre ser expandida em soma simples de frações parciais

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

Onde *B(s)* e *A(s)* são polinômios em *s*, $a_k$ são constantes chamadas resíduo no polo $s = -p_k$. O valor de $a_k$ pode ser encontrado multiplicando-se ambos os lados desta equação por $(s+p_k)$ e fazendo $s = -p_k$.:

$$\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)=$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_n)$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 40

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

40

# Transformada inversa de Laplace

- Expansões em frações parciais quando F(s) tem apenas polos distintos (cont.)

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]\Bigg|_{s=-p_k} = a_k$$

Pois, nesse caso, todas as parcelas se anulam, exceto a parcela do polo $p_k$

Temos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

Como

$$\mathcal{L}[F(s)] = \mathcal{L}^{1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{n}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

$$f(t) = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \cdots + a_n e^{p_n t}, \quad para\ t \geq 0$$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 41

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

41

# Transformada inversa de Laplace

- Exercício 1: Determinar a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

- Fazer já

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 42

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

42

# Transformada inversa de Laplace

## Determinar a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Expandindo em frações parciais: $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$

Usando a fórmula $\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]\bigg|_{s=-p_k} = a_k$

$$a_1 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right]\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right]\bigg|_{s=-2} = -1$$



# Transformada inversa de Laplace

## Exercício 1 (cont.)

Vimos que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}[F(s)] = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{S+1}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right]$$

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

# Transformada inversa de Laplace

- Exemplo 2: Achar a transformada inversa de Laplace de

$$G(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)} \quad \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} s^3 & +5s^2 & +9s & +7 & (s+1)(s+2) \\ -s^3 & -5s^2 & -8s & -4 & \hline 0 & 0 & s & +3 & (s+2) \end{array}$$

Portanto $\quad G(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}=s+2+\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 45

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

45

# Transformada inversa de Laplace

- Exemplo 2 (cont.)

Note que o último termo à direita se refere ao exemplo anterior

Então $\quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}[s]+2\mathcal{L}^{-1}[1]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right]$

Cuja solução é

$f(t)=2e^{-t}-e^{-2t} \qquad t\geq 0$

A transformada de Laplace do impulso unitário e do de sua derivada são respectivamente 1 e s. Portanto:

Portanto $\quad f(t)=D\delta(t)+2\delta(t)+2e^{-t}-e^{-2t}$

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 46

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

46

# Pontos Ordinários e Singulares - Polos e Zeros

- **Pontos no plano s em que a função G(s) é *analítica* são chamados de pontos *ordinários*. Os pontos do plano s em que a função G(s) não é *analítica* são chamados pontos *singulares*.**
- ***Polos* são *pontos singulares* nos quais a função G(s) ou suas derivadas se aproximam do infinito**
- **Exemplo:** $G(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$ Tem polos em $s = -p_1$ e $s = -p_2$

Se $\lim_{s\to -p} G(s) \to \infty$ e se a função $G(s)(s+p)^n$ $(n = 1,2,3,...)$ tem um valor finito não nulo em $s = -p$ então $-p$ é chamado de pólo de ordem $n$. Se $n = 1$ o pólo é chamado de pólo simples. Se $n = 2,3,...$ o pólo é chamado de pólo de segunda ordem, terceira ordem e assim por diante.

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 47

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

47

# Pontos Ordinários e Singulares - Polos e Zeros

- ***Zeros* são pontos ordinários nos quais a função G(s) é zero**
- **Existem pontos no infinito e no finito que podem levar G(s) para zero. Se pontos no infinito são levados em conta a G(s) terá o mesmo número de *polos* e *zeros***

$$G(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$$

Por exemplo, esta função tem um zero em $s = -z$. Se pontos no infinito são também considerados G(s) tem o mesmo número de polos e zeros. No exemplo acima G(s) tem 2 zeros no infinito em adição ao zero finito dado por –z. Note que:

$$G(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)^2}$$

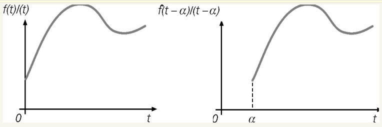
$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{K}{s^2}\right) \to 0$$ Portanto temos 3 polos e 1 zero

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 48

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

48

# Resumo 1 de 4

| | |
|---|---|
| **Linearidade ou Homogeneidade** | $L\left[\alpha f(t)\right] = \alpha L\left[f(t)\right] = \alpha F(s)$ |
| **Aditividade** | $\mathscr{L}[\, f_1(t) \pm f_2(t)\,] = \mathscr{L}[\, f_1(t)\,] \pm \mathscr{L}[\, f_2(t)\,] = F_1(s) \pm F_2(s)$ |
| **Translação no tempo** |   $\int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$ |



49

# Resumo 2 de 4

| | |
|---|---|
| **Derivação** | $\mathscr{L}[\frac{d}{dt} f(t)] = \mathscr{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0)$ |
| **Derivação de ordem *n*** | $L\left[D^n f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(t) - \cdots - sD^{n-2} f(0) - D^{n-1} f(0)$ |



50

# Resumo 3 de 4

| | |
|---|---|
| **Teorema do valor inicial** | $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ |
| **Teorema do valor final** | $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ |

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 51
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

51

# Resumo 4 de 4

| | |
|---|---|
| **Multiplicação pela função exponencial** | $\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt = F(s+\alpha)$ |
| **Transformada inversa de Laplace** | $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds, t > 0$ |

set-20 Mauro Spinola - Marcelo Pessôa - EPUSP-PRO 52
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

52

# [4] – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace

PRO
USP
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
EPUSP

## PRO3252
## Automação e Controle

**Mauro de Mesquita Spinola**

**Marcelo Schneck de Paula Pessôa**

**EPUSP-PRO**

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | Departamento de Engenharia de Produção

53