

**PME 3534 – Técnicas Experimentais e Computacionais
em Biomecânica em Sistemas Vasculares**

Aula: 09/09/20

Prof. Jayme P. Ortiz

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS – MÉTODO DOS
VOLUMES FINITOS PARA PROBLEMAS DE DIFUSÃO E
CONVECÇÃO**

SUMÁRIO

- 1. Equações da Continuidade e de Navier Stokes para Escoamento Newtoniano e Incompressível**
- 2. Generalização das Equações da Continuidade e de Navier-Stokes**
- 3. Introdução ao Método dos Volumes Finitos: Problemas de Difusão Pura**

1. Equações da Continuidade e de Navier Stokes para Escoamento Newtoniano e Incompressível

As leis básicas que regem a Mecânica dos Fluidos, em particular a Dinâmica dos Fluidos Reais estão representados pelas equações de derivadas parciais: Equação da Continuidade e Equação da Quantidade de Movimento (Navier-Stokes).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

No caso de escoamento plano, incompressível e isotérmico, em coordenadas cartesianas:

$$\operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

São poucos os casos de soluções analíticas (exatas) da Equação de N-S.

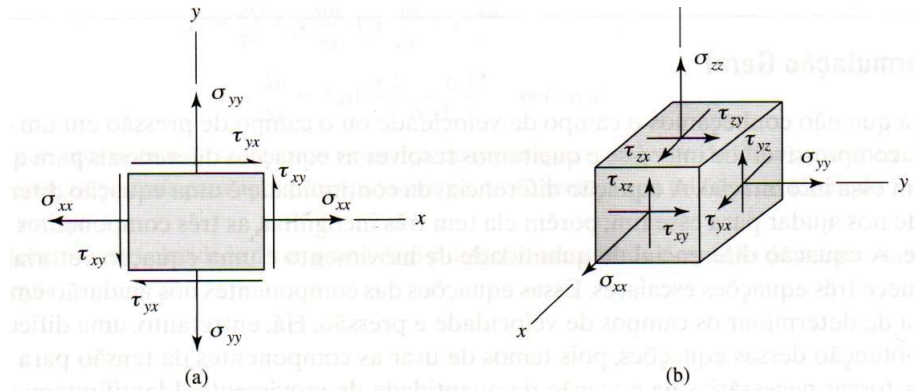
Exemplos: Escoamentos de Couette e Poiseuille em movimento laminar (aula passada).

A dificuldade de se encontrar soluções analíticas decorre do fato de que as equações de N-S são equações Diferenciais Parciais (EDPs) não lineares, e a teoria matemática dessa classe de equações ainda não está suficientemente desenvolvida para permitir a obtenção de soluções analíticas em regiões arbitrárias e condições de contorno gerais.

2. Generalização das Equações da Continuidade e Navier – Stokes

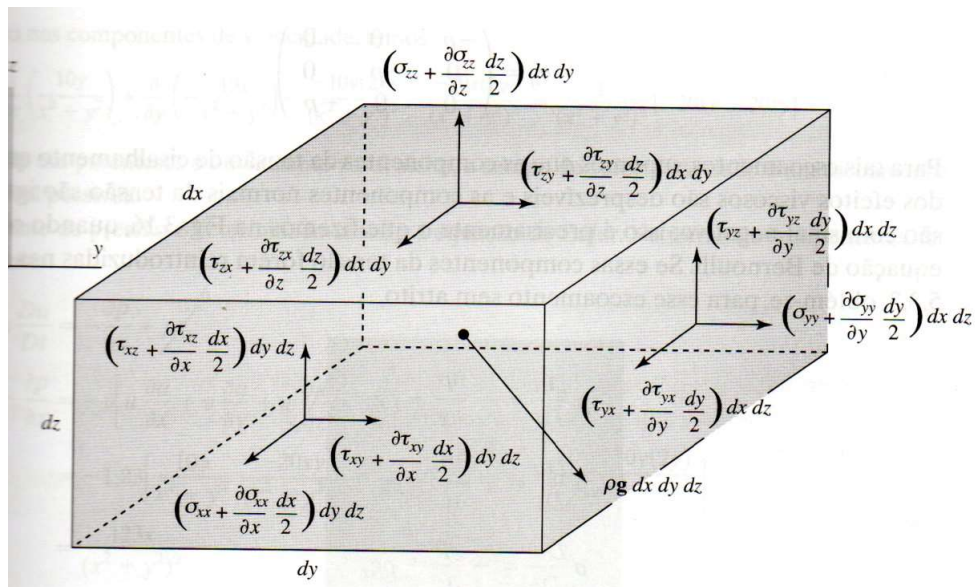
As figuras 1 a e 1 b mostram as componentes das tensões em coordenadas cartesianas em um elemento infinitesimal de fluido, em um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z)

Figura 1:



A figura 2 mostra as forças agindo nas faces do elemento infinitesimal de fluido.

Figura 2:



Fonte: Potter; Wiggert; Ramadan; 2015

Aplicando a equação da quantidade de movimento que corresponde a segunda lei de Newton, na direção x, $\Sigma F_{extx} = ma_x$ ao elemento infinitesimal cúbico de fluido, resulta no seguinte:

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\
& - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\
& - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + \rho g_x dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt}
\end{aligned}$$

Dividindo-se esta equação pelo volume $dV = dx dy dz$, e estendendo para as três direções, resulta nas equações I abaixo:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \\
\rho \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z
\end{aligned}$$

(I)

Para os fluidos Newtonianos e Isotrópicos é possível relacionar as componentes de tensões usando duas propriedades do fluido:

$\mu \rightarrow$ coeficiente de viscosidade dinâmica;

$\lambda \rightarrow$ segundo coeficiente de viscosidade.

As relações tensão–gradiente são conhecidas como equações constitutivas e os nove componentes constitutivos das tensões (que se traduzem em seis independentes) são representados pelas equações II:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{V}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \vec{V}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \vec{V}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

(II)

Hipótese de Stokes: $\lambda = \frac{2}{3} \mu$

A viscosidade dinâmica μ , se relaciona a taxa de deformação linear e a viscosidade λ se relaciona a taxa de deformação volumétrica (só para fluidos compressíveis).

Substituindo-se as equações II nas equações I resulta nas equações III, abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + Sm_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + Sm_y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \vec{v} \right] + Sm_z \end{array} \right.$$

(III)

Rearranjando os termos das equações III e considerando a condição de incompressibilidade, resulta a equação IV:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{V}] + \frac{\partial}{\partial y} [\mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] + \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] &= \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial w}{\partial z}) &= \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) \quad \text{IV} \end{aligned}$$

Substituindo IV em III, resulta V:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + S_{my} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + S_{mz} \end{aligned} \right. \quad \text{(V)}$$

- Equações Gerais de Transporte

Nós poderíamos estender os conceitos da dedução anterior de N-S, obtendo-se o seguinte resumo das equações de governo do escoamento 3D.

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Equação de N-S (direção x):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad} u) + S_{mx}$$

direção y:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad} v) + S_{my}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad} w) + S_{mz}$$

Equação da Energia:

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i \vec{V}) = -\rho \text{div} \vec{v} + \text{div}(k \text{grad} T) + S_i$$

Equações de Estado:

$$p = p(\rho, T) \quad e \quad i = i(\rho, T)$$

gás perfeito: $p = \rho R T$ e $i = C_v T$

Introduzindo-se uma variável geral ϕ nas equações acima, que possa representar componentes de velocidade, temperatura, energia interna etc, tem-se a Equação Geral de Transporte:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \vec{V}) = \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S_\phi \quad (\text{VI})$$

Em palavras:

Taxa de variação de ϕ no elemento fluido	Fluxo convectivo de ϕ através SC	Taxa de variação de ϕ devido a difusão	Taxa de variação de ϕ devido às fontes
--	---	---	---

fronteiras do elemento fluido

A equação VI é utilizada como ponto de partida para a análise computacional usando o método de volume finitos. Estabelecendo-se valores para $\phi = 1, u, v, w, i$ (ou T), respectivamente, e selecionando valores apropriados para o coeficiente de difusão Γ e para os termos fontes, obtemos cada uma das equações de derivados parciais apresentadas.

O problema seguinte seria a integração da equação VI em um volume de controle 3D.

$$\int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_{\forall C} \text{div}(\rho\phi\vec{V}) d\forall = \int_{\forall C} \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) d\forall + \int_{\forall C} S_{\phi} d\forall$$

O termo 2 (termo convectivo) e o termo 3 (termo difusivo) podem ser transformadas em integrais de superfície, utilizando-se o teorema de Gauss.

$$\int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall + \int_A \vec{n} \cdot (\rho\phi\vec{V}) dA = \int_A \vec{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dA + \int_{\forall C} S_{\phi} d\forall \quad (\text{VII})$$

$\int_{\forall C} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\forall \rightarrow$ taxa de variação da propriedade ϕ no $\forall C$;

$\int_A \vec{n} \cdot (\rho\phi\vec{V}) dA \rightarrow$ fluxo convectivo da propriedade através da SC;

$\int_A \vec{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dA \rightarrow$ fluxo difusivo da propriedade através da SC;

$\int_{\forall C} S_{\phi} d\forall \rightarrow$ termo fonte no $\forall C$.

No caso de escoamento permanente:

$$\int_A \vec{n} \cdot (\rho \phi \vec{V}) dA = \int_A \vec{n} \cdot (\Gamma \text{grad} \phi) dA + \int_{\forall C} S_\phi dV$$

3. Introdução ao Método dos Volumes Finitos: Problemas de Difusão Pura

Retomando a equação VI:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \vec{V}) = \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S_\phi$$

Estabelecendo as hipóteses de difusão pura, permanente e unidimensional, resulta VI:

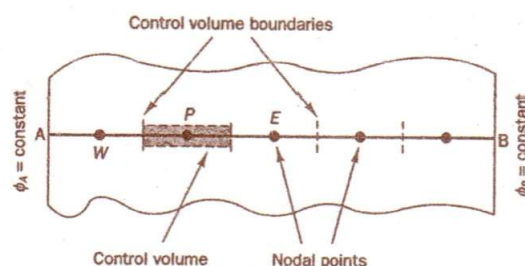
$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S_\phi = 0$$

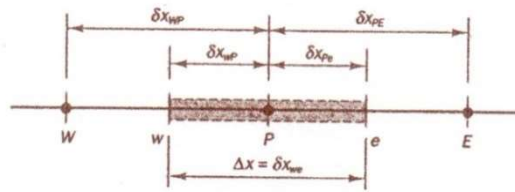
(VIII)

Os passos para a resolução numérica desta equação são os seguintes:

1º passo: Geração da Malha:

Que consiste em dividir o domínio em volumes de controle discretos (elementares), definindo-se um certo número de nós no espaço entre as fronteiras. Cada nó P é circundado por um volume de controle ou célula.





Fonte: Versteeg e Malalasekera, 2007

2º passo: Discretização do Domínio:

A chave do método dos volumes finitos é a integração das equações de governo (eq. gerais de transporte) sobre o volume de controle elementar ($\forall C$) de modo a obter uma equação discretizada correspondente nos pontos nodais (P).

Para o volume de controle acima definido, tem-se que:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + S \Delta V \quad (IX)$$

O método das diferenças centrais aplicando interpolação linear, resulta:

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

E os termos de fluxos difusivos podem ser avaliados por:

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right)$$

O termo fonte no método dos volumes finitos é traduzido por uma aproximação linear na forma:

$$S \Delta V = S_u + S_P \phi_P$$

Substituindo essas equações na equação IX, resulta:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_P \phi_P) = 0$$

(IX)

Sendo: $a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$$

Finalmente:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u$$

(XI)

Ou: $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$

3º Passo: Solução das equações discretizadas

As equações discretizadas devem ser escritas para cada ponto nodal de modo a resolver o problema. Para volumes de controle que são adjacentes ao domínio das fronteiras, a equação deve ser modificada, de modo a incorporar as “condições de fronteira”.

“O sistema de equações lineares algébricas é então resolvido de modo a obter-se a distribuição da propriedade Φ nos pontos nodais.”

Referências

Potter, M.C.; Wiggert, D.C.; Ramadan, B.H. (2015) Mecânica dos Fluidos – Tradução da 4^o Edição Norte-Americana. CENGAGE Learning.

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W. (2007) An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method. Pearson Prentice Hall – second edition.