Objetivo: Aprender a representar "certas funções" como somas de séries de potências.

Exemplos: Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\underline{\underline{|x|<1}}$

a) manipulando esta expressão podemos obter uma representação para $\dfrac{1}{5+x}$: De fato,

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1+\frac{x}{5}}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{5}\right)}\right]$$

$$\underset{\text{para } \left|-\frac{x}{5}\right|<1}{=} \frac{1}{5}\sum_{n=0} \left(-\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^n}{5^{n+1}}$$

para $\underline{|x|<5}$

b) obter uma expressão em série para $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3 - x^3}$, $a \neq 0$.

Solução: $$\frac{x^2}{a^3-x^3} = \frac{x^2}{a^3}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^3} \underset{|x|<|a|}{=} \frac{x^2}{a^3}\sum_{n=0}\frac{x^{3n}}{a^{3n}}$$

$$= \sum_{n=} \frac{x^{3n+2}}{a^{3n+3}}$$ // para $|x|<|a|$ //.

Teorema de diferenciação e integração para séries de potências.

Suponha que temos a representação $f(x) = \sum_{n=0} c_n (x-a)^n$ para $|x-a| < R$. Então

i) $f'(x) = \sum_{n=1} n c_n (x-a)^{n-1}$, $|x-a| < R$

$\uparrow$ olho

ii) $\int f(x)\,dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const. de} \\ \text{integração}}}{c} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, $|x-a| < R$.

→ Aplicações: 1) Achar ~~uma~~ a representação em séries de potências para

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1} n x^{n-1}$$

Solução: sabemos que para $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

2) Mostrar que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$

Solução: Sabemos $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n$, $|x| < 1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1-x}\,dx = c + \sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ com } |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) =$$

• Agora determinamos c: para $x = 0$ acima

$$-\ln(1) = c \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1 \,//.$$

3) Determinar uma representação em séries de potências para $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Solução: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$$= \int \frac{1}{1+x}\,dx - \int \frac{1}{1-x} = \int \frac{-2x}{1-x^2}$$

Logo determinamos uma representação para $f(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$.

$$f(x) = -2x\,\frac{1}{1-x^2} \underset{|x^2|<1}{=} -2x \sum_{n=0} x^{2n}$$

$$= -2\sum_{n=0} x^{2n+1} \qquad |x|<1 \;//$$

$\Rightarrow$ integrando, $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = C - 2\sum_{n=0} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ $\quad |x|<1$

Em $x=0$ temos $\ln(1) = C = 0$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -2\sum_{n=0} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)} = -\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{n}$$

4) Determine a soma da série $\sum_{n=1} n x^n$ para $|x|<1$.

Solução: para $|x|<1$, sabemos $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n$

$\Rightarrow$ derivando temos $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1} n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1} n x^n \;//.$$

5) Determinar uma série de potências para $f(x) = tg^{-1}(x)$.

Solução: Sabemos que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0} (-1)^n x^{2n} \Rightarrow$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = C + \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

• Agora como $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = C + 0 = C$

$$\Rightarrow \quad tg^{-1}(x) = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1 \quad (*)$$

6) Mostrar que $\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$ //

Solução: De $(*)$ escolha $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

$$\Rightarrow \pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \quad //$$