→ objetivo: Como e quando podemos representar funções como uma "série de potências"
→ A ser definido ←

Exemplo clave: obter que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

→ A seguir desenvolvemos uma teoria que justifique relações como essa em (*).

Séries de potências

Definição: Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots$$

- os c_n são constantes reais chamados coeficientes da série
- $x \in \mathbb{R}$ e pode estar restricto a um específico intervalo (a,b) para que a série converga!!

Exemplos: a) Determinar para que valores de x a seguinte série de potências converge, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Solução: a) aqui temos $c_n \equiv 1$.

b) Aplicando o critério da razão temos para $a_n = x^n$ que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$. Então para $|x| < 1$, ou seja $x \in (-1, 1)$ temos que a série converge.

(*) para $|x| > 1$, pelo critério sabemos que a série diverge.

b) para $|x|<1$, podemos determinar a ~~valor~~ soma de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (2)

Solução: a) Sim !!

b) Sabemos que temos uma série geométrica e assim $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ //

(*) Assim a série de potências $\sum_{n=0} x^n$, $|x|<1$, fornece uma representação para a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $(-1,1)$

c) <u>Exemplo extremo</u>: para que valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ converge.

Solução: só converge para $x=0$!!

a) usando Teste da razão com $a_n = n!\,x^n$

temos $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = (n+1)|x| \longrightarrow +\infty$ para $x \neq 0$

$x=0$ || 0 //

Definição: uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ com c_n e a constantes dadas, é chamada série de potências centrada em a ou ao redor de a //.

Exemplo: Determinar os valores de x tais que a série $\sum \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n 2^n}$ converge.

Solução: 1) Aqui $a=-2$

2) usando o Teste da razão com $a_n = \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n\,2^n}$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x+2|}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n 2^n}{1} = |x+2| \frac{n}{(n+1)2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}|x+2|$$

logo a série de potências converge para $\frac{1}{2}|x+2|<1 \iff$
$|x+2|<2 \iff -2<x+2<2 \iff \underline{-4<x<0}$

→ Intervalo de convergência e raio de convergência.

Nos exemplos acima temos vistos que o conjunto de valores x para os quais a série converge resulta ser um intervalo. da forma (a, b) ou $\underbrace{(-\infty, +\infty)}_{\text{"}\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} \text{ verificar"}}$ ou inclusive só um ponto

→ O seguinte teorema mostra que de fato esse é o panorama geral.

Teorema 1: Para toda série de potências $\sum_{n=0} c_n (x-a)^n$ existem apenas três possibilidades.

i) a série converge apenas para $x = a$,

ii) a série converge para todo x,

iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

Definição: 1) O número R em (iii) acima é chamado raio de convergência da série de potência.

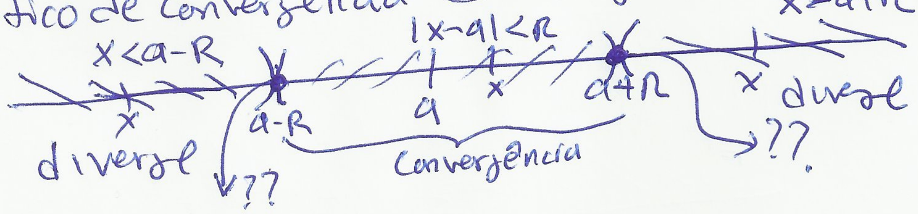
2) no caso (i) acima $R = 0$ e no caso (ii) $R = +\infty$.

3) O Intervalo de convergência de uma série de potências é $I(R) = (-R-a, R+a)$.

- no caso (i) acima $I(R) = \{a\}$, no caso (ii) $I(R) = (-\infty, +\infty)$.

Nota: !! **OLHO**: Nos extremos finitos $x = -R-a$ e $x = R+a$ Qualquer coisa pode acontecer. Assim, $(-R-a, R+a]$ $[-R-a, R+a)$ ou $[-R-a, R+a]$ pode acontecer!!

2) Gráfico de convergência e divergência



Prova do teorema 1: Basta considerar $a=0$.

a) Se $\sum c_n x^n$ converge para $x=b$ $(b\neq 0)$ $\Rightarrow$ ela converge $\forall\ |x|<|b|$: De fato, como $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0 \Rightarrow \forall\, n\geq N$

$$|c_n b^n|<1 \Rightarrow |c_n x^n| = |c_n b^n|\left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

$\Rightarrow$ pa $|x|<b$ temos $\left|\frac{x}{b}\right|<1 \Rightarrow$

$\underbrace{\sum \left|\frac{x}{b}\right|^n}_{\text{geométrica}}$ converge e assim por comparação temos

$\underbrace{\sum |c_n x^n| < \infty}_{\text{Convergência absoluta}}$ para $|x|<|b|$. !!

b) Se $\sum c_n x^n$ diverge para $x=d$ $(d\neq 0)$ $\Rightarrow$ a série diverge pa $|x|>|d|$: De fato, para $|x|>|d|$ precisamos ter que $\sum c_n x^n$ diverge, caso contrário, se por acaso (com x obvio $\neq 0$), deveríamos
se $\sum c_n x^n$ converge
ter pelo item i) que $\sum c_n d^n$ converge (absurdo!!)

c) Parte final: *) Suponha que os casos i)-ii) do teorema não aconteçam (considerando $a=0$!!)

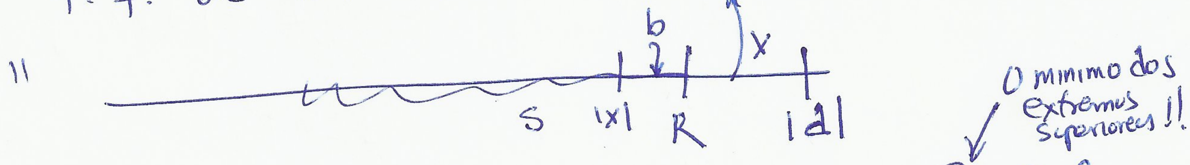
Então existe $b,d\in\mathbb{R}-\{0\}$ tal que pa $x=b$, $\sum c_n x^n<\infty$ e para $x=d$, $\sum c_n d^n$ diverge!

*) Seja $S=\{x : \sum c_n x^n <\infty\}$ e veremos que $S\neq\emptyset$ e tem um limite superior mínimo (O supremo do conjunto)

•) De fato, $S\neq\emptyset$ pois $x=b\in S$

•) Como $\sum c_n d^n$ diverge pelo item b) temos $\forall\, x$ t.q. $|x|>|d|$ a série diverge $\Rightarrow$ se $y\in S \Rightarrow \underbrace{|y|\leq|d|}_{\text{obvio!!}}$.

∘) Logo $|d| \neq 0$ resulta ser um extremo superior para S,
$\Rightarrow$ pelo Axioma de Completitude dos números reais
(ver pg. 707 do livro de Stewart) existe $\underbrace{R > 0}_{\text{Supremo de } S}$
t.q. se $|x| > R \Rightarrow x \notin S \Rightarrow \sum c_n x^n$ diverge.



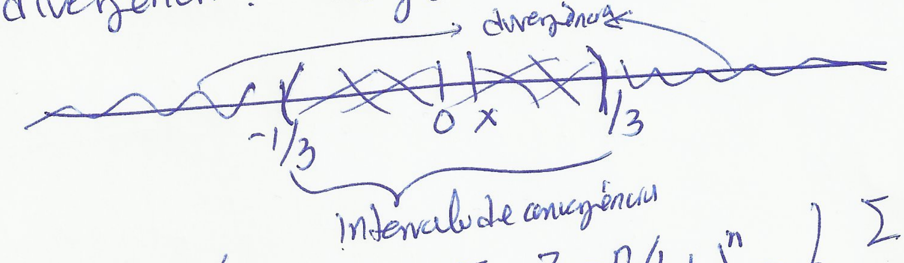
∘) Agora para $|x| < R$ temos por definição de R que
existe $\underline{b \in S}$ e $b > |x| \Rightarrow$ por (a) acima precisamos
temos que $\sum c_n x^n$ converge absolutamente!! $\blacksquare$

Exemplos: 2) Encontrar o raio de convergência da série $\sum n^2 3^n x^n$

Solução: Usando o critério da raiz

$$\lim_{n\to\infty} |n^2 3^n x^n|^{1/n} = \lim n^{2/n} \, 3|x| = 3|x|$$

logo para $|x| < \frac{1}{3}$ temos convergência e para $|x| > \frac{1}{3}$
temos divergência. Logo o raio $R = \frac{1}{3}$



Nota: para: $x = \pm 1/3$ temos $\sum n^2 3^n \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n = \begin{cases} \sum n^2 \\ \sum (-1)^n n^2 \end{cases}$ divergem.

logo nos extremos do intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ temos divergência.

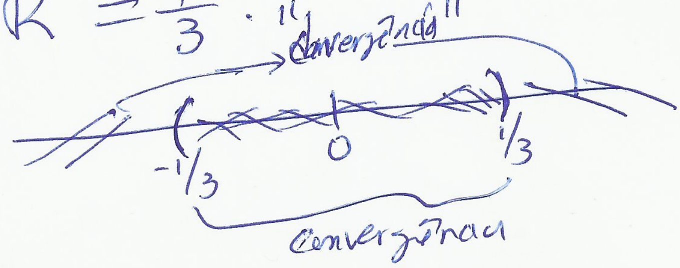
b) Encontrar o raio de convergência de $\sum_{n=0} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

Solução: Usando o Teste da Razão.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 3|x|\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x|$$

Logo a série converge para $|x|<\frac{1}{3}$ e diverge para $|x|>\frac{1}{3}$.

- raio de convergência $R=\frac{1}{3}$.
- situação gráfica



- Analizamos: $R=\pm\frac{1}{3}$. • para $R=\frac{1}{3}$ temos

$$\sum_{n=0}\frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{3^n} = \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} < \infty.$$

por Leibniz!!

para $R=(-\frac{1}{3})$ temos $\sum \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{(-1)^n}{3^n} = \sum\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Como $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge

Obtemos por comparação que $\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge.

* Logo o intervalo de convergência total é:

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \quad //$$

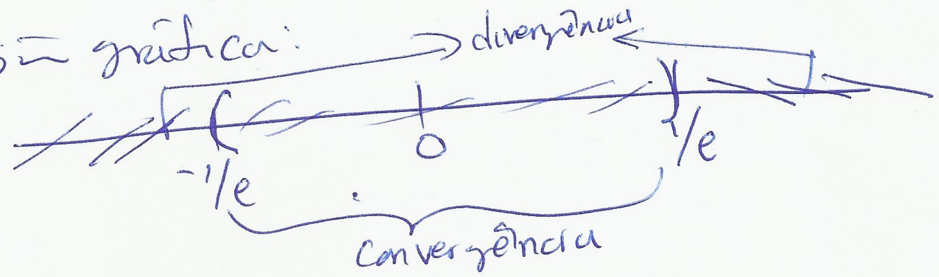
e) Encontrar o raio de convergência de $\sum_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Solução: usando o teste da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} |x| = e|x|,$$

logo para $|x| < \frac{1}{e}$ temos convergência e para $|x| > \frac{1}{e}$ temos divergência.

- raio de convergência $R = \frac{1}{e}$
- Situação gráfica:



- Analizamos: $R = \pm\frac{1}{e}$

* Para $x = \frac{1}{e}$, temos $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = 1 \Rightarrow$ a série ~~converge~~ diverge!

* para $x = -\frac{1}{e}$, temos $\sum (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$

Suponha que a série converge $\Rightarrow \lim \underbrace{(-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}}_{a_n} = 0$

$\Rightarrow \lim |a_n| = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = 0 \Leftarrow$ falso

* Conclusão: Intervalo de convergência

$\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ //.

Encontrar o raio de convergência de $\sum_{n=1} \frac{x^n}{a^n+b^n}$, $a>0, b>0$. (8)

Solução: i) Suponha $a=b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \frac{|x|}{a\,2^{1/n}} = \frac{|x|}{a}$

$\Rightarrow$ Convergência para $|x|<a$

Suponha $a<b$. Como $\cancel{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq}$

$$\begin{array}{ccccc} b & \leq & \sqrt[n]{a^n+b^n} & \leq & 2^{1/n} b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b & & n & & b \end{array}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \frac{|x|}{b}$

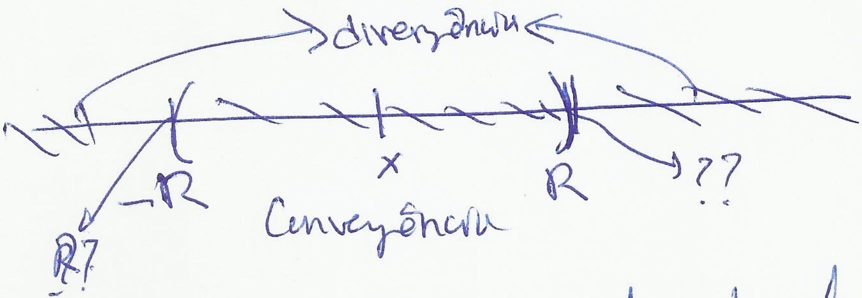
$\Rightarrow$ Convergência para $|x|<b$

ii) Suponha $a>b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \frac{|x|}{a} < 1 \Rightarrow |x|<a$

iii) Conclusão: $R = \text{máximo}\{a,b\}$.

iv) Gráfico:



* Averiguar o que acontece nos extremos do intervalo?