Aula 1. Distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias discretas (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Distribuição conjunta, marginais e condicionais de v.a.discretas X, Y.

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) =: p(x, y) \geq 0, \qquad \sum_{x,y} p(x, y) = 1$$

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y} p(x, y) =: p_X(x),$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x} p(x, y) =: p_Y(y)$$

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$$

Esperança condicional $\mathbb{E}(X \mid Y)$. $\mathbb{E}(X \mid Y)$ é uma **variável aleatória** com valores $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ e respectivas probabilidades $\mathbb{P}(Y = y)$. A propriedade importante $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) &= \sum_y \mathbb{E}(X \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_x \sum_y x\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x x \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

$\square$

Esperança condicional $\mathbb{E}(X \mid Y)$. Exercício 3.10. (Ross)

Supomos que o número médio de acidentes numa estrada durante uma semana é μ. Supomos que o número de vítimas em cada acidente são independentes e com a média ν. Achar o número médio de vítimas em acidentes durante uma semana.

Solução: Seja X número de vítimas em acidentes durante uma semana. Seja X_i número de vítimas em i-ésimo acidente, e denotamos N número de acidentes em uma semana. Então $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, em que interpretamos $\sum_{i=1}^{0} = 0$. Obtemos

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid N))$$

$$\mathbb{E}(X \mid N = n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\middle|\, N = n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, N = n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\nu$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid N)) = \sum_{n} n\nu \mathbb{P}(N = n) = \nu \sum_{n} n \mathbb{P}(N = n) = \nu\mu$$

$\square$

Esperança condicional $\mathbb{E}(X \mid Y)$. Exercício 3.10. (Ross)

A solução anterior é a fórmula para somas com número aleatório das variáveis em soma:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \;\middle|\; N\right)\right) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$$

Variância condicional $\mathbb{V}ar(X \mid Y)$ **(Ross)** é variável aleatória com valores $\mathbb{V}ar(X \mid Y = y)$ com respectivas probabilidades $\mathbb{P}(Y = y)$. Em que o valor

$$\mathbb{V}ar(X \mid Y = y) = \mathbb{E}(X^2 \mid Y = y) - (\mathbb{E}(X \mid Y = y))^2$$

O análogo da formula para esperança condicional é

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X \mid Y)) + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(X \mid Y))$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{V}ar(X \mid Y)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 \mid Y) - (\mathbb{E}(X \mid Y))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}((\mathbb{E}(X \mid Y))^2) \\
\mathbb{V}ar(\mathbb{E}(X \mid Y)) &= \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X \mid Y))^2\right) - \left(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left((\mathbb{E}(X \mid Y))^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

somando obtermos o resultado.

Exercício 3.1. (Ross) Supomos que a distribuição conjunta de v.as. X, Y é dada de seguintes $p(x, y)$:

$$p(1,1) = 0.5,\ p(1,2) = 0.1,\ p(3,1) = 0.1,\ p(3,2) = 0.3,$$

Achar distribuição marginal de X, distribuições condicionais de X e distribuição de esperança condicional $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

Solução.

	1	3
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

Exercício 3.1. (Ross) Solução: achar distribuições condicionais de X

	1	3
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

Exercício 3.1. (Ross) Solução: achar distribuição de $\mathbb{E}(X \mid Y)$

	1	3
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

Exercício 3.2. (Ross). $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, X_1, X_2 são independentes. Achar a esperança condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = n$.

Solução.

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n - k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}$$

Exercício 3.3. (Ross). $X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$, X_1, X_2 são independentes. Achar a distribuição de X_1 dado $X_1 + X_2 = m$

Solução.

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = m) = \frac{\binom{n_1}{k} p^k q^{n_1-k} \binom{n_2}{m-k} p^{m-k} q^{n_2-m+k}}{\binom{n_1+n_2}{m} p^m q^{n_1+n_2-m}} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}}{\binom{n_1+n_2}{m}}$$

Exercício 3.4. (Ross). Consideremos experimento com três resultados possíveis $1, 2$ e 3 com respectivas probabilidades p_1, p_2 e p_3. Fazendo n experimentos independentes, denotamos X_i um resultado do i-ésimo experimento. Seja Y_i a quantidade de resultados $i, i = 1, 2, 3$, entre n experimentos. Determine a distribuição e esperança de Y_1, dado que $Y_2 = m$.

Solução.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 = k \mid Y_2 = m) &= \frac{\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p_1^k p_2^m p_3^{n-k-m}}{\frac{n!}{m!(n-m)!} p_2^m (1-p_2)^{n-m}} \\ &= \frac{(n-m)!}{k!(n-k-m)!} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^k \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{n-k-m}\end{aligned}$$