# IME-USP
# MAT134 – AlgLin
# T42 (Diurno)

Tópico: *Quádricas*

2/2020

Profa. Ana Paula Jahn

# QUÁDRICAS - Introdução

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0, \qquad (1)$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero, representa uma *superfície quádrica* ou simplesmente uma *quádrica*.

Observemos que se a superfície quádrica dada pela equação (1) for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma *cônica*. A interseção de uma superfície com um plano é chamada *traço* da superfície no plano.

Por exemplo, o traço da superfície quádrica (1) no plano $z = 0$ é a cônica

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

contida no plano $z = 0$, isto é, no plano $xOy$.

# *QUÁDRICAS - Introdução*

Por outro lado, através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), a equação (1) pode ser transformada em uma das formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \tag{2}$$

ou:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Rz &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde a equação (2) representa uma quádrica *centrada* e as equações (3) quádricas *não centradas*.

Nosso objetivo é identificar e esboçar o gráfico de uma quádrica, conhecida sua equação.

# *QUÁDRICAS CENTRADAS*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \qquad (2)$$

Se nenhum dos coeficientes da equação (2) for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam três, dois ou um o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação. Se os referidos coeficientes forem todos negativos, não existe lugar geométrico.

# *UM PRIMEIRO CASO*

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm\frac{y^2}{b^2} \pm\frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

Todos os coeficientes dos termos do 1º membro da equação (**4**) são positivos, e a, b, c são reais positivos.

Para identificar a superfície e esboçar seu gráfico, determinamos:

**1) Traços** da superfície **nos planos coordenados**;
2) Pontos de **intersecção com os eixos** coordenados;
**3) Traços** da superfície **em planos paralelos aos planos Coordenados**
**4) Elementos de simetria**

# UM PRIMEIRO CASO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (5)$$

O traço no plano xOy é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0 \qquad (i)$$

e os traços nos planos xOz e yOz são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0 \;(ii) \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0 \;(iii), \text{ respectivamente.}$$

***Intersecção com os eixos coordenados***:

- x=y=0: $z=|c|$ - dois pontos: (0,0,c) e (0,0,-c)
- x=z=0: y= $|b|$ - dois pontos: (0,b,0) e (0,-b,0)
- y=z=0: x= $|a|$ - dois pontos: (a,0,0) e (-a,0,0)

# UM PRIMEIRO CASO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (5)$$

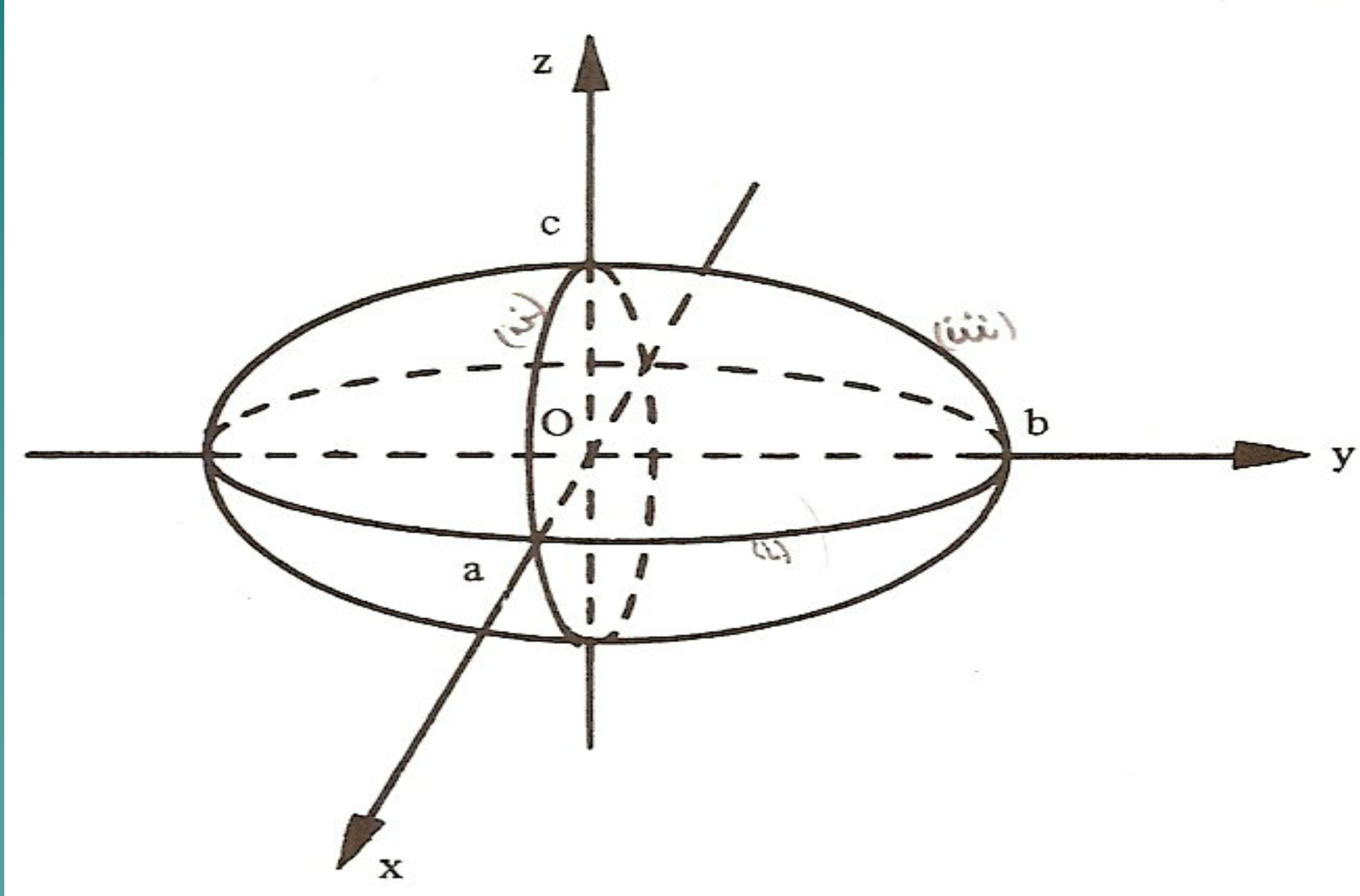
Consideremos um plano paralelo ao plano $xOy$, isto é, um plano da forma $z=k$. Substituindo $z$ por $k$ na equação (5) vem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

Se $|k|<c$, $1-\frac{k^2}{c^2}>0$, e, portanto, o traço no plano $z=k$ é uma elipse. Se $|k|=c$, os planos $z=c$ e $z=-c$ tangenciam o elipsóide nos pontos $(0,0,c)$ e $(0,0,-c)$. Se $|k|>c$, $1-\frac{k^2}{c^2}<0$ e, conseqüentemente, não existe gráfico. Considerações análogas podem ser feitas relativamente aos planos paralelos aos planos $xOz$ e $yOz$.

# ELIPSÓIDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



# CASO PARTICULAR DE ELIPSÓIDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

Se pelo menos dois dos valores a, b e c são iguais, o elipsóide é de *revolução*. Por exemplo, se $a = c$, o elipsóide é obtido girando a elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

do plano $yOz$ em torno do eixo dos $y$.

# *EXEMPLO de ELIPSÓIDE de REVOLUÇÃO*

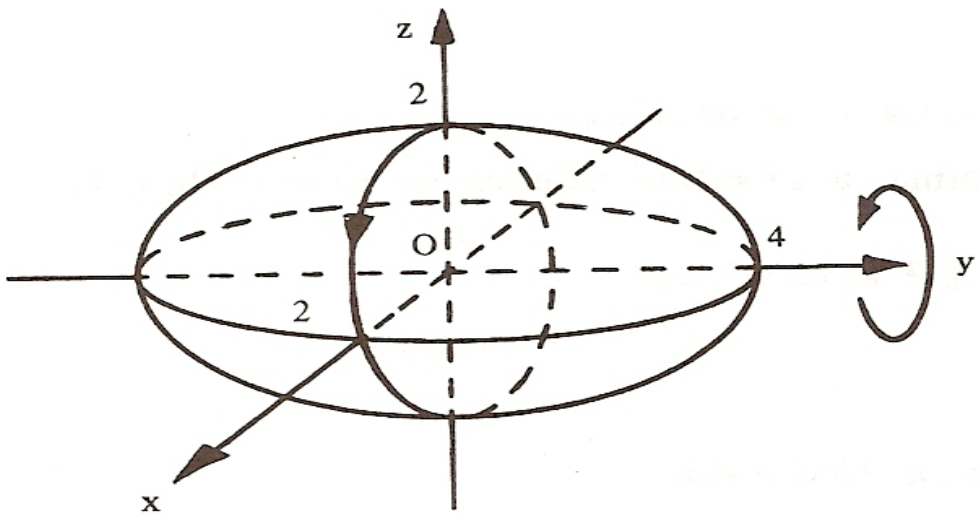
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

onde $a = c = 2$, que se obtém girando a elipse:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad x = 0 \text{ em torno do eixo dos } y.$$

O traço no plano *OXZ* é a circunferência:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad y = 0$$

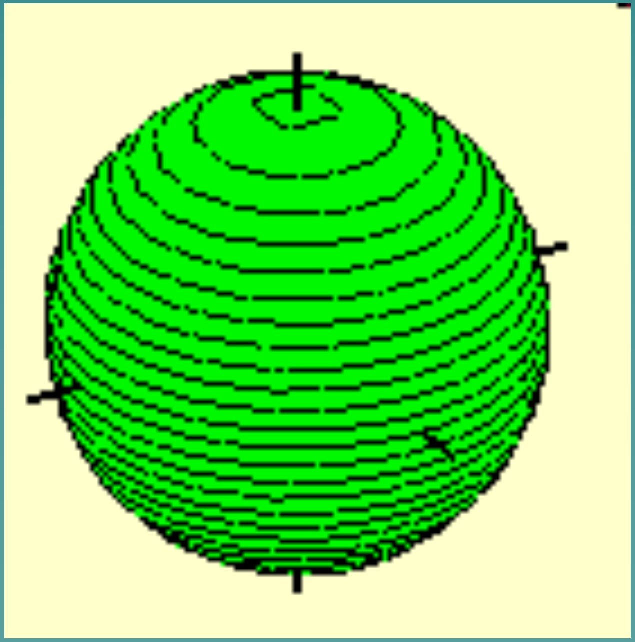


# CASO PARTICULAR DE ELIPSÓIDE

No caso de $a = b = c$, a equação (5) toma a forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e representa uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $a$.



# *EXEMPLOS*

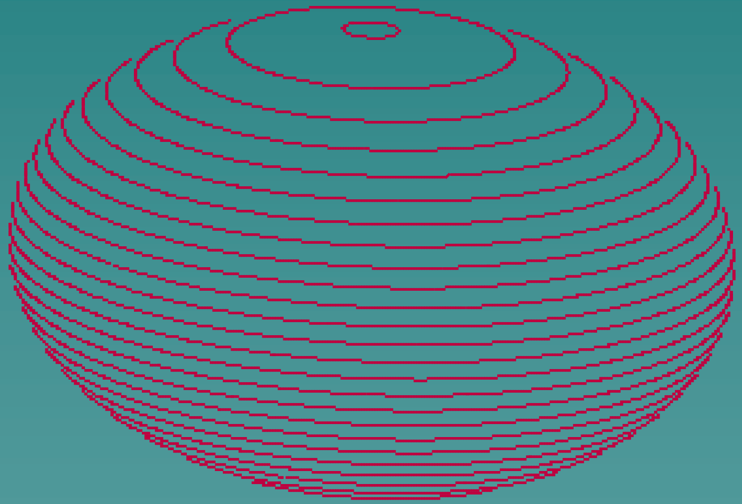
- Reduzir a equação à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

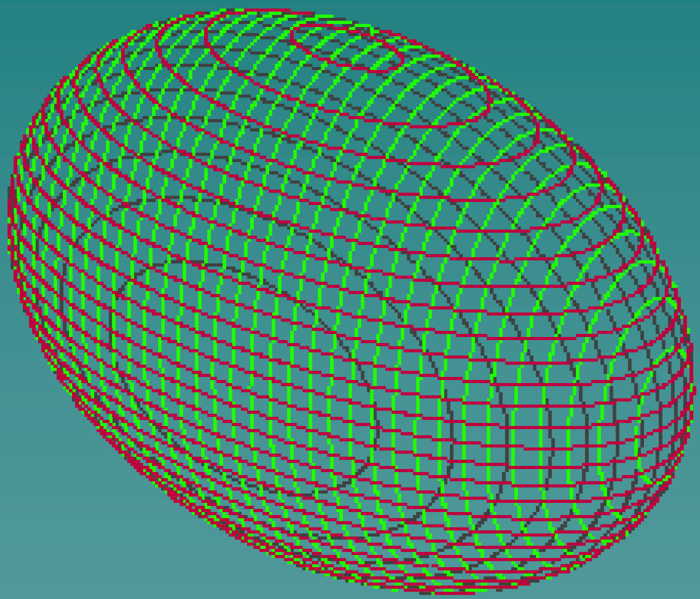
- A) $36x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$
- B) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

(Esboço no papel e lápis e representação no *Geogebra*)

# *GRÁFICO*

36xx+9yy+16zz=144

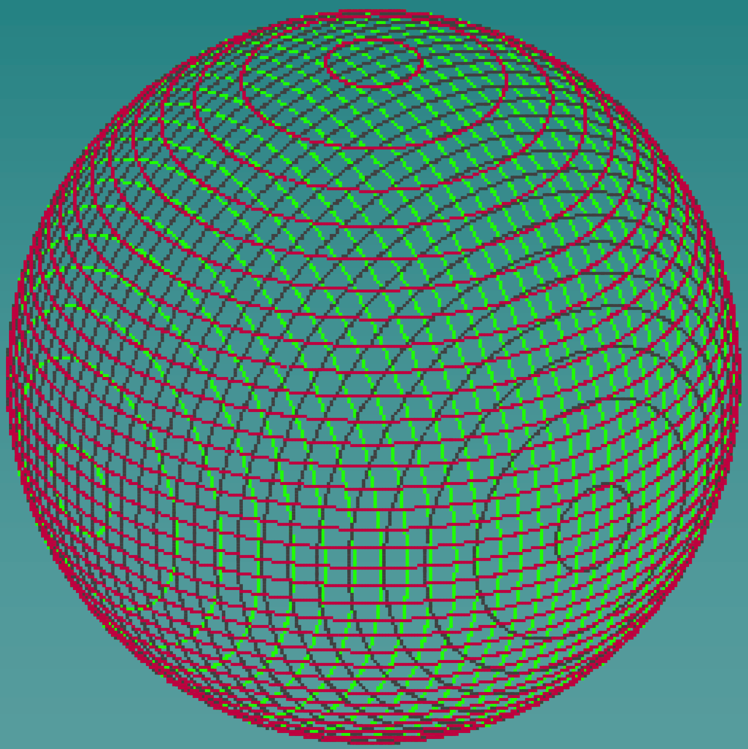




Os traços da superfície em planos paralelos aos planos Coordenados são também chamados de “curvas de nível”.

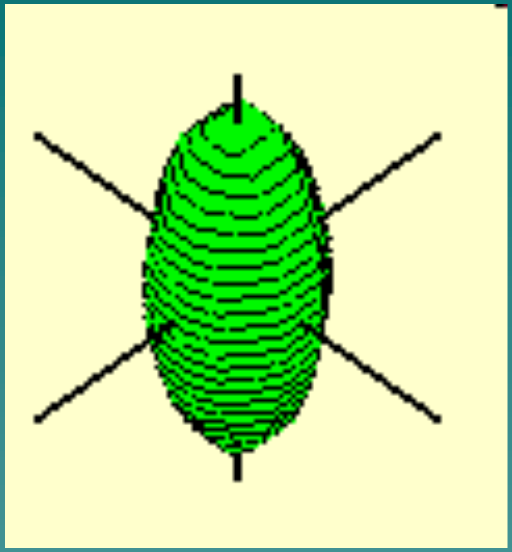
# ELIPSÓIDE

xx+yy+zz=4



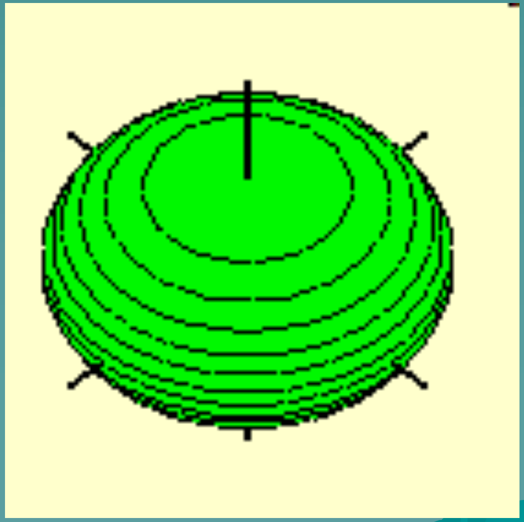
# ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

- $a = b < c$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- $a = b > c$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

# *ELIPSÓIDE de CENTRO FORA DA ORIGEM*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

Se o centro do elipsóide é o ponto $(h, k, \ell)$ e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação (5) assume a forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(z - \ell)^2}{c^2} = 1$$

obtida através de uma translação de eixos.

Da mesma forma, a superfície esférica de centro $(h, k, \ell)$ e raio a, tem equação:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - \ell)^2 = a^2.$$

# *UM SEGUNDO CASO*

- Se na equação (4) **dois dos coeficientes** do 1º membro **são positivos** e **um negativo,** o que essa equação representa?

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6)$$

**1) Traços** da superfície **nos planos coordenados**;
2) Pontos de **intersecção com os eixos** coordenados;
**3) Traços** da superfície **em planos paralelos aos planos coordenados**

# UM SEGUNDO CASO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (6)$$

O traço no plano xOy em (6) é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0$$

e os traços nos planos xOz e yOz são as hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0$$

e $$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0$$

respectivamente.

E as intersecções com os eixos:

i) OX, $y=z=0$: $x=|a|$

ii) OY, $x=z=0$: $y=|b|$

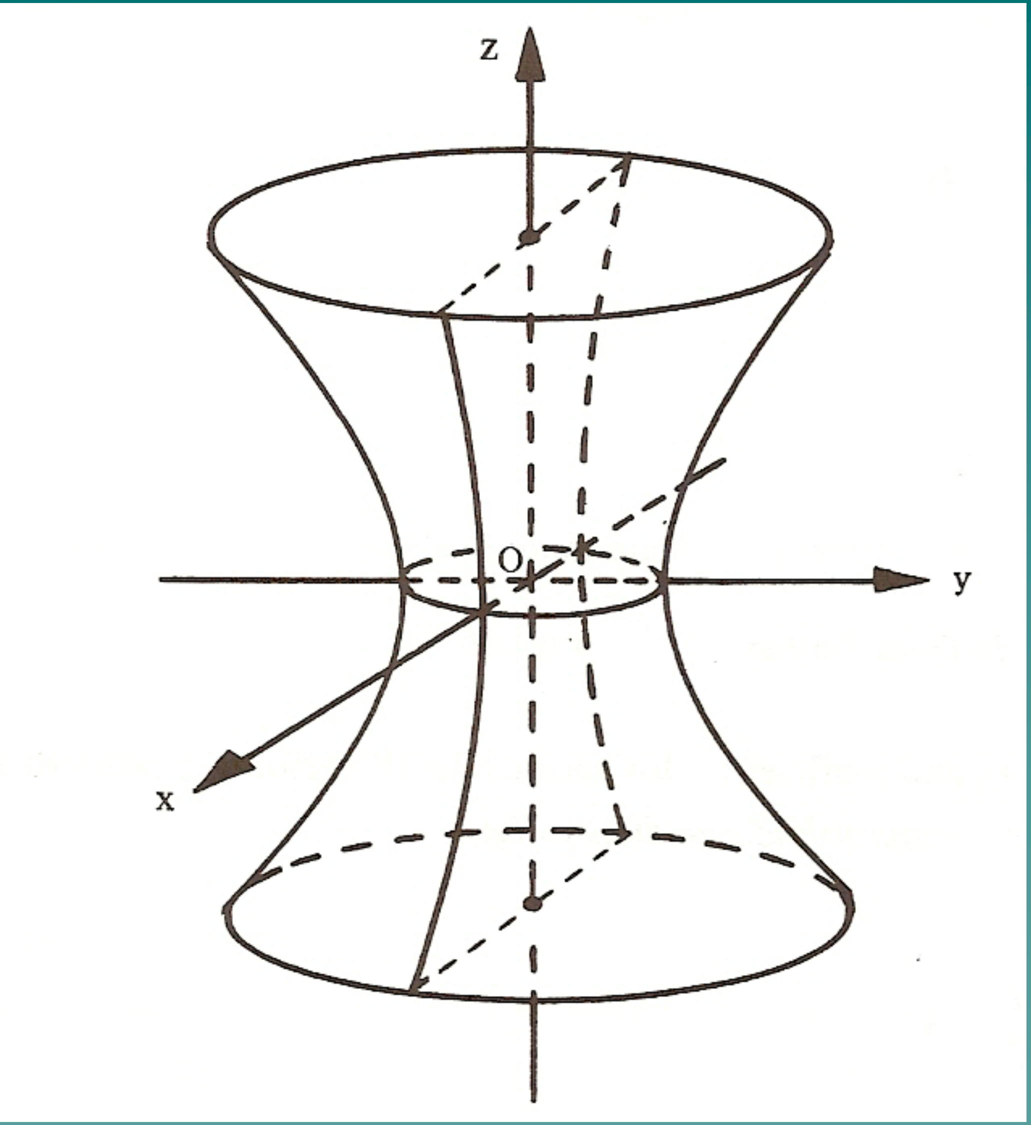
iii) OZ, $x=y=0$: não existe

# UM SEGUNDO CASO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano $xOy$. Os traços nos planos $x = k$ $y = k$ são hipérboles.

# HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA



# HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

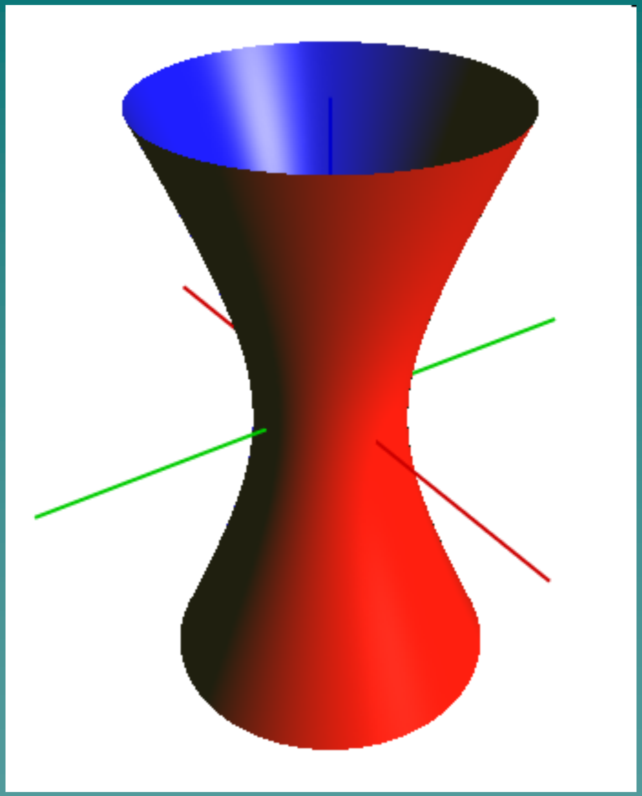
é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z

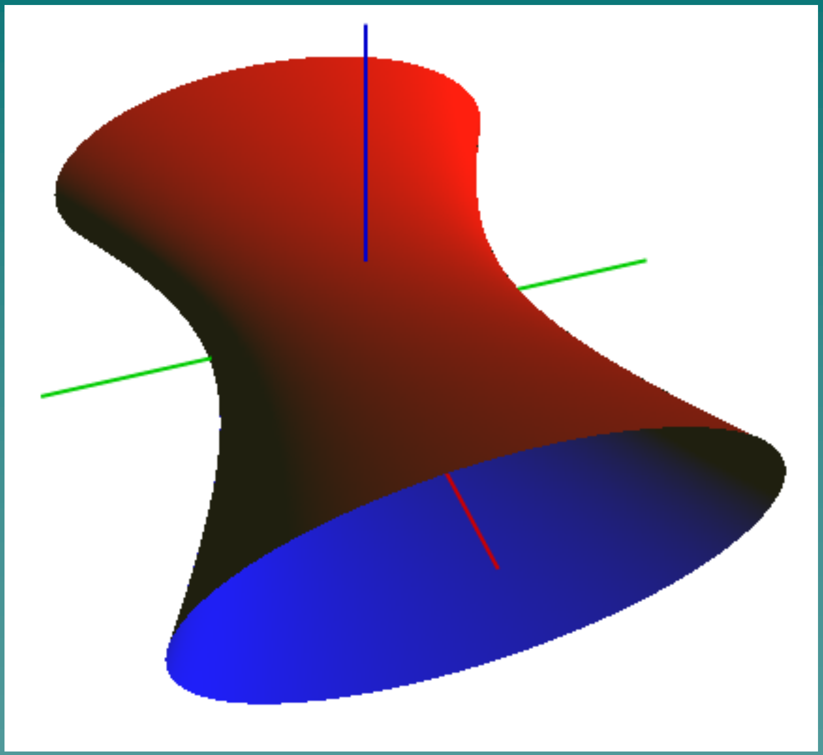
As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

# HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA





# HIPERBOLÓIDE DE REVOLUÇÃO

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

Se na equação (6) tivermos $a = b$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário, no caso, o eixo $Oz$. O traço no plano $xOy$ é a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad z = 0$$

ou:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

# *EXEMPLOS*

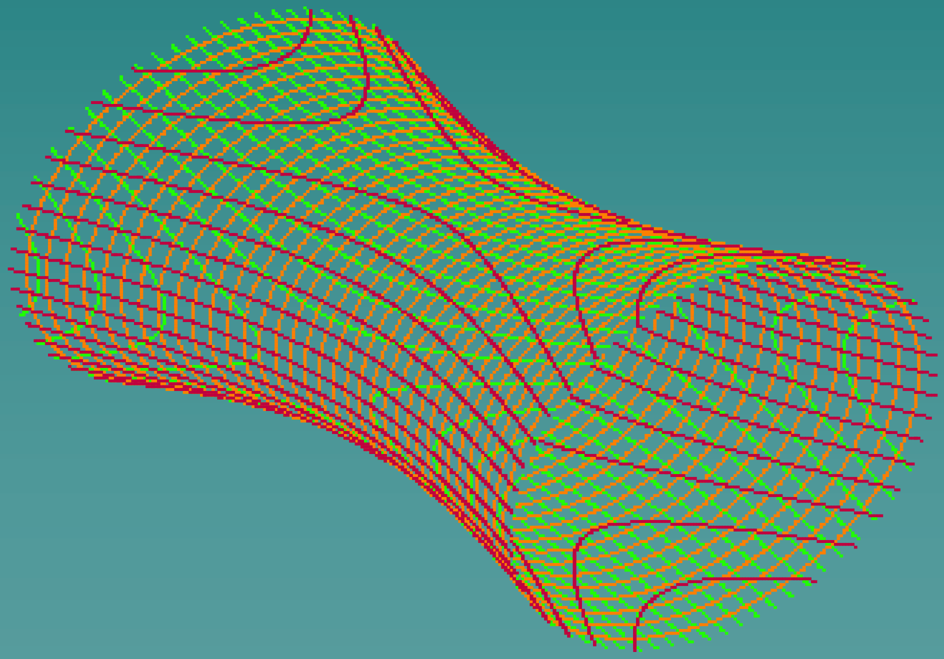
- Reduzir a equação à forma canônica, identificar e esboçar o gráfico da quádrica que ela representa.

- $4x^2 - y^2 + 8z^2 = 16$

(Represente um esboço no papel e, depois, represente a quádrica no *Geogebra*.)

# *Exemplo*

4xx-yy+8zz=16



# HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

Se na equação (4) um coeficiente dos termos do 1º membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um *hiperbolóide de duas folhas.*

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7)$$

é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo dos y (Fig. 8.2.3). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

# HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

Os traços nos planos xOy e yOz em (7) são, respectivamente, as hipérboles:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad z = 0$$

e:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

O plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y = k$, onde $|k| < b$.

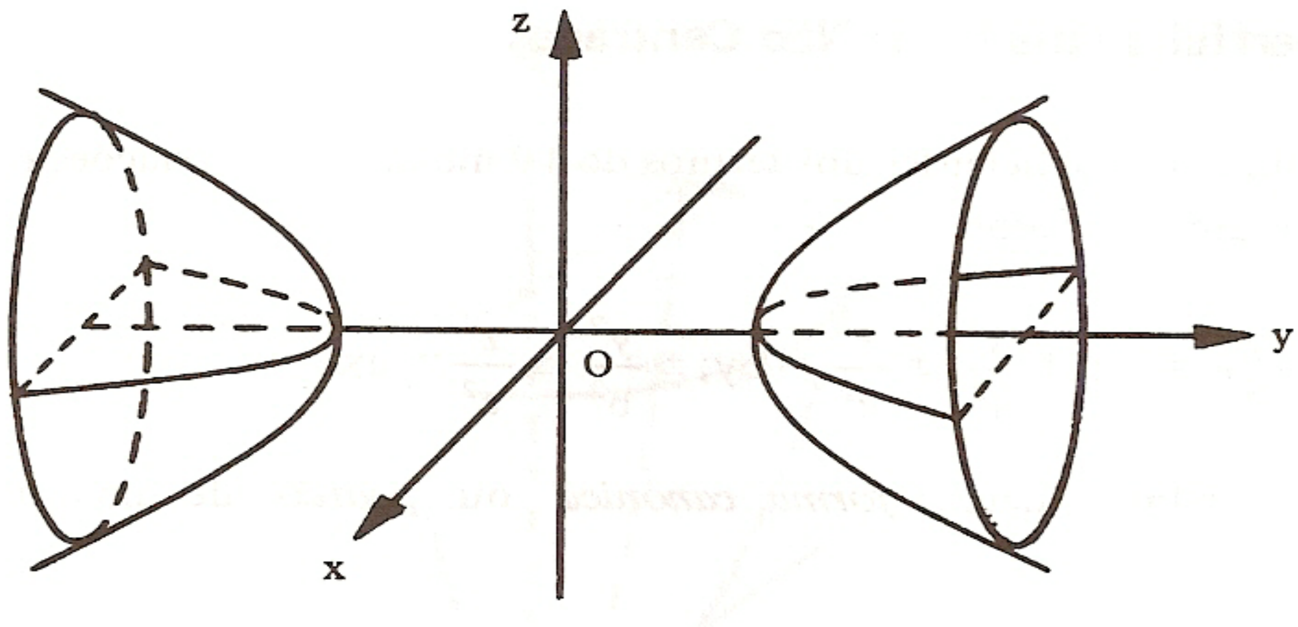
Se $|k| > b$, o traço no plano $y = k$ é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, \ y = k$$

Os traços nos planos $x = k$ e $z = k$ são hipérboles.

# *HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



# HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

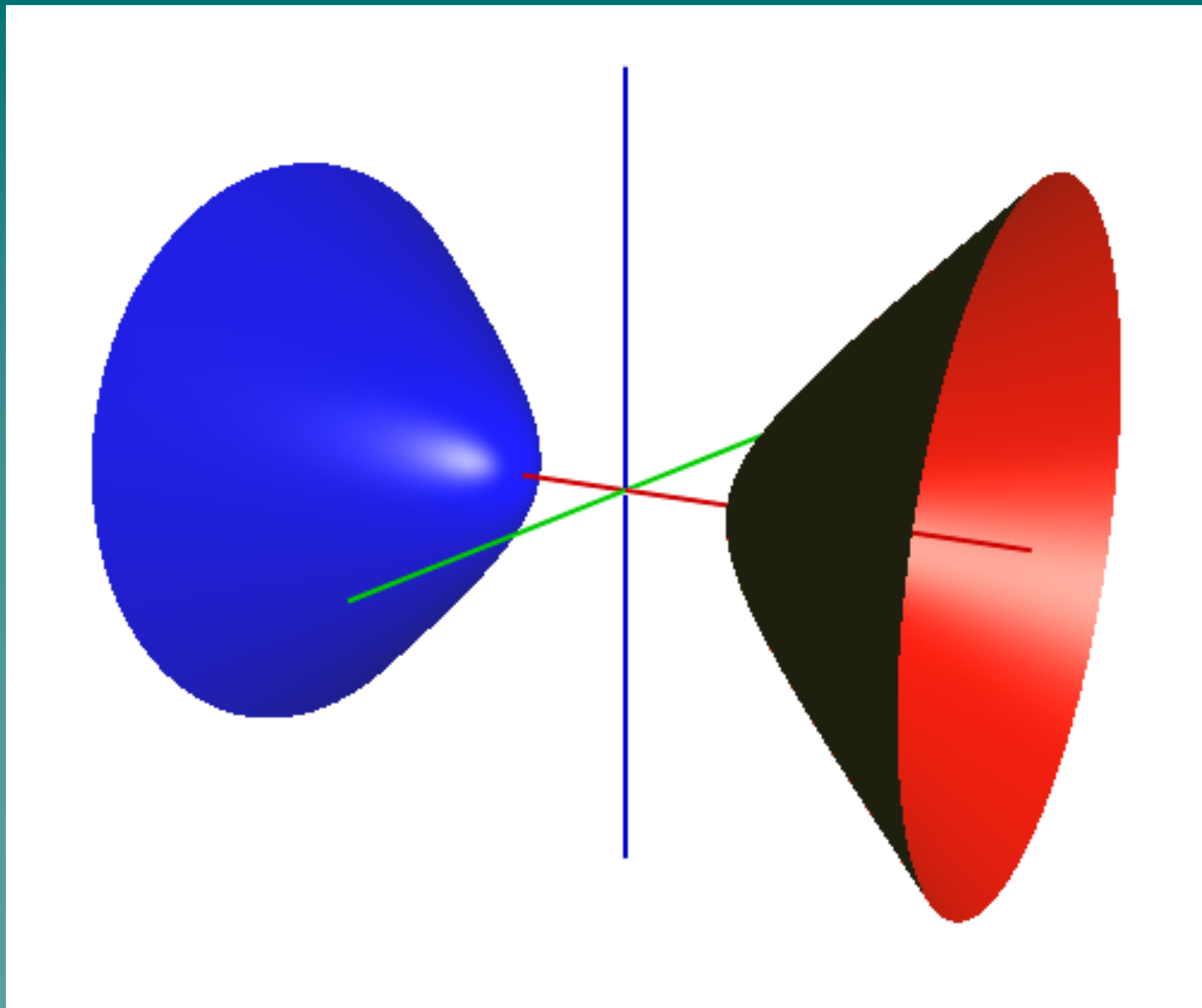
Se na equação (7) tivermos $a = c$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real. O traço no plano $y = k$, $|k| > b$, é a circunferência:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad y = k$$

ou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, \; y = k$$

# HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS



## *EXEMPLO*

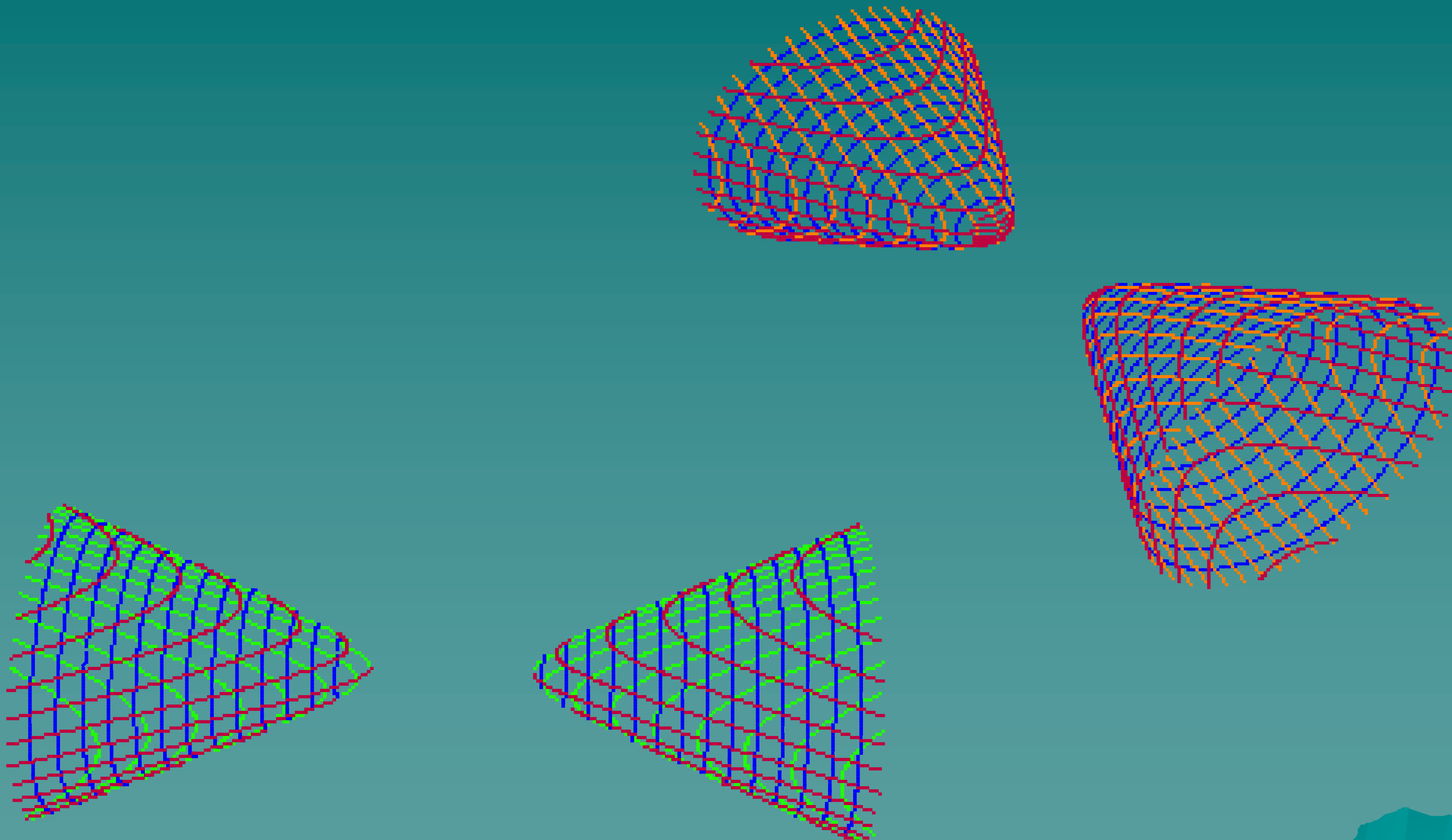
- Reduzir a equação à forma canônica, identificar e esboçar o gráfico da quádrica que ela representa.

$$-4x^2 + y^2 - 8z^2 = 16$$

- Represente a quádrica no ***Geogebra*** (Janela 3D)

# GRÁFICO

$-4xx+yy-8zz=16$



# SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1º membro das equações (3) for nulo, elas podem ser escritas sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz;\ \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by;\ \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax \qquad (8)$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica não centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

# PARABOLÓIDE ELÍPTICO

Se nas equações (8) os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um *parabolóide elíptico*.

A equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{9}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo dos $z$ (Fig. 8.3.1). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

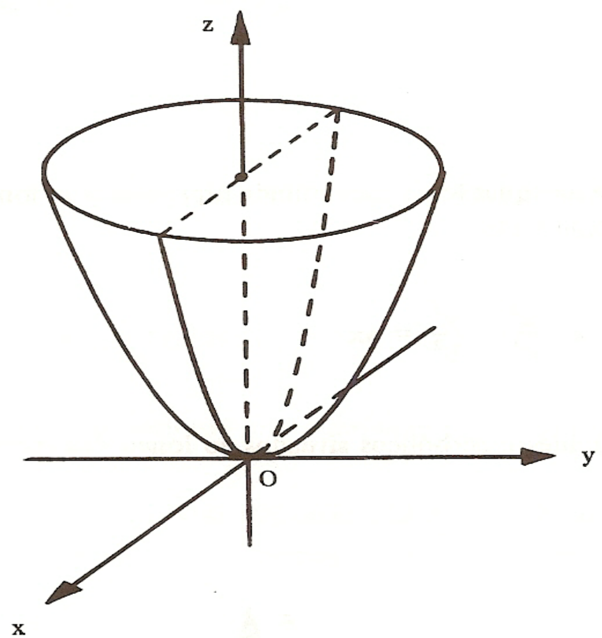
e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos $Oy$ e $Ox$, respectivamente.

# PARABOLÓIDE ELÍPTICO

O traço no plano xOy em (9) é a origem (0, 0, 0) e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz, \quad y = 0 \quad e \quad \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad x = 0,$$

respectivamente.



# PARABOLÓIDE ELÍPTICO

Se $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano $xOy$ e, para $c < 0$, a superfície está inteiramente abaixo deste plano. Assim, o sinal de $c$ coincide com o de $z$, pois caso contrário não haveria lugar geométrico.

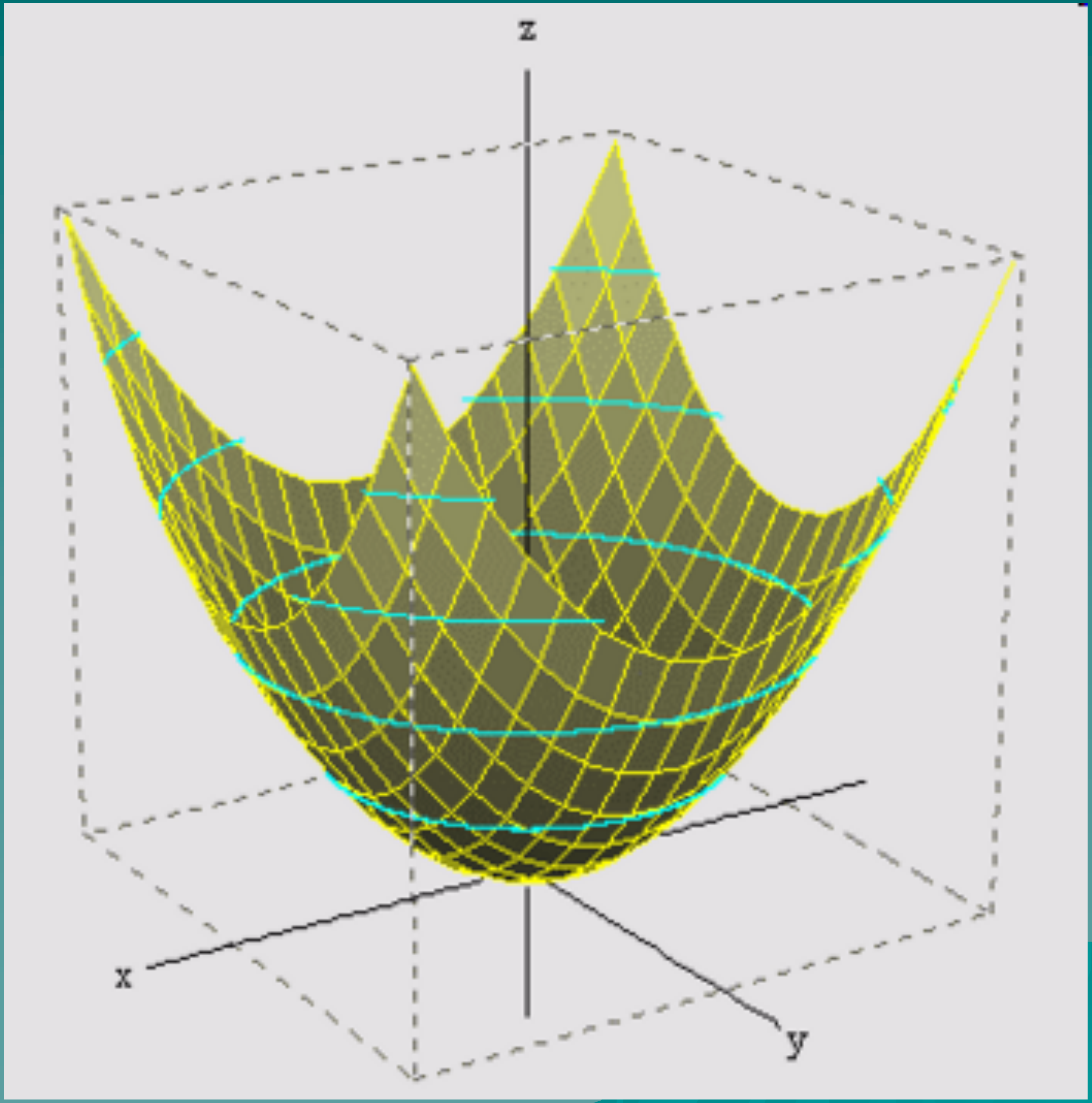
Um traço no plano $z = k$, $k > 0$ (Fig. 8.3.1), é uma elipse que aumenta de tamanho à medida que o plano se afasta do plano $xOy$. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Se na equação (9) tivermos $a = b$, o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola:

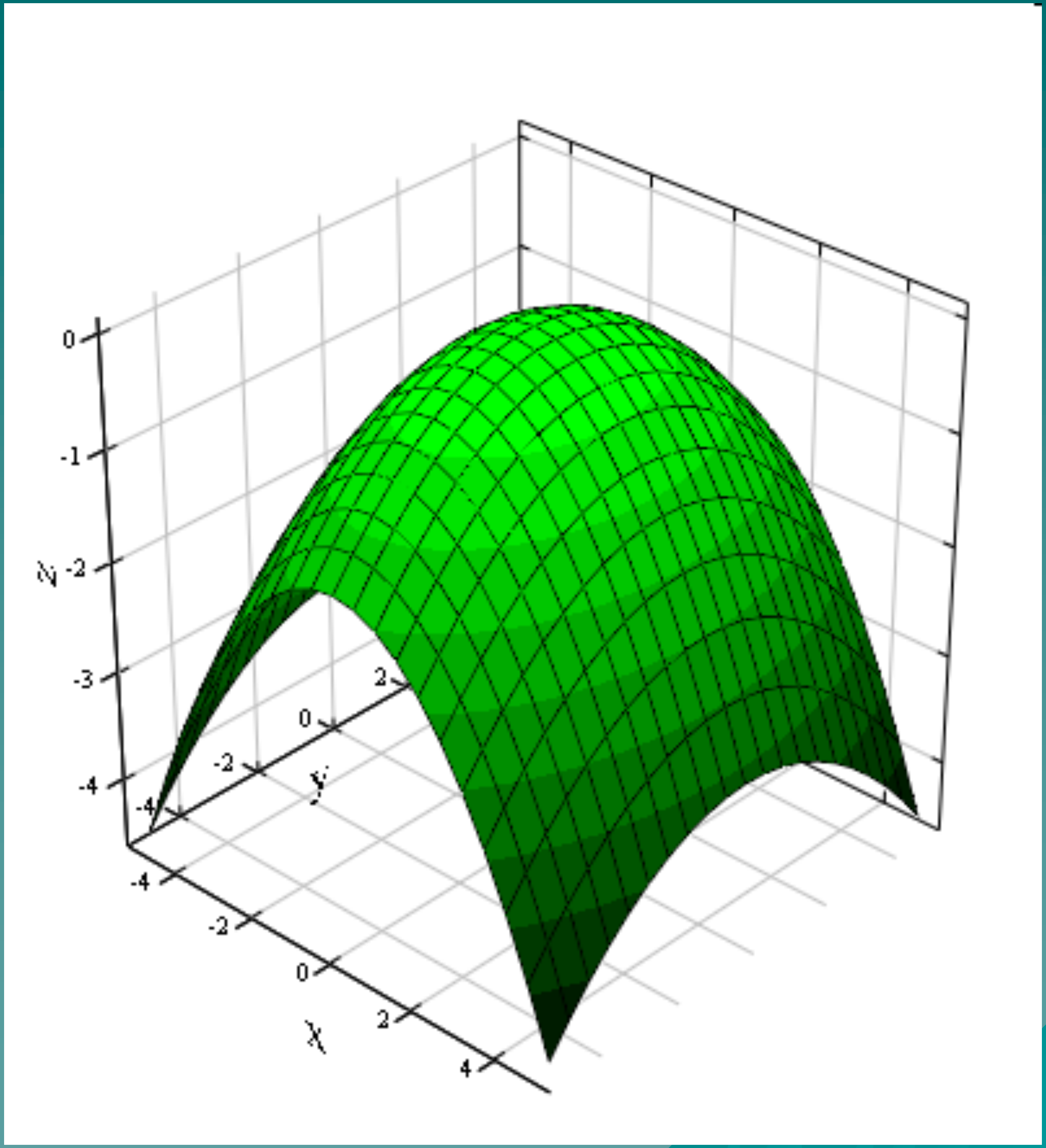
$$\frac{y^2}{b^2} = cz, \quad x = 0$$

em torno do eixo dos $z$. Neste caso, o traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

# *PARABOLÓIDE de Revolução*



# PARABOLÓIDE ELÍPTICO



## *EXEMPLO*

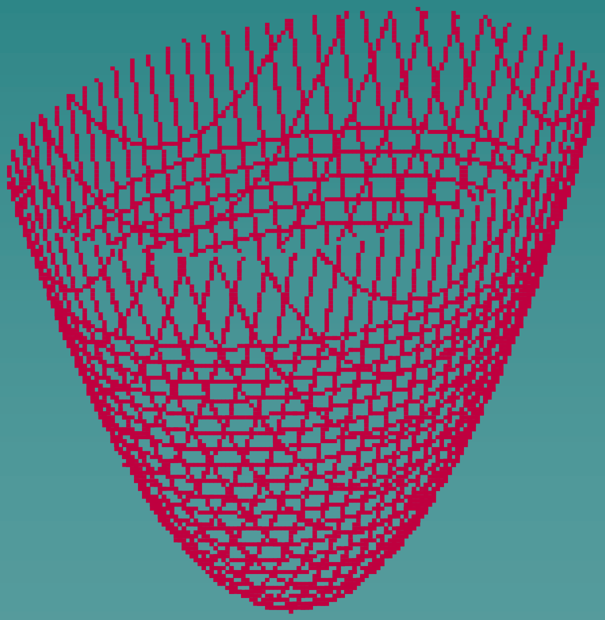
- Reduzir a equação à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

$$x^2 + 2y^2 - z = 0$$

- Represente a quádrica no ***Geogebra*** (Janela 3D)

# *Exemplo Parabolóide*

xx+2yy-z=0



# PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

- Se nas equações (8) os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um **parabolóide hiperbólico**.

A equação:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz \tag{10}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos $z$ (Fig. 8.3.2). As outras formas canônicas são

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

e representam parabolóides hiperbólicos situados ao longo dos eixos $Oy$ e $Ox$, respectivamente.

# PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

O traço em (10) no plano xOy é o par de retas:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0, \quad z = 0,$$

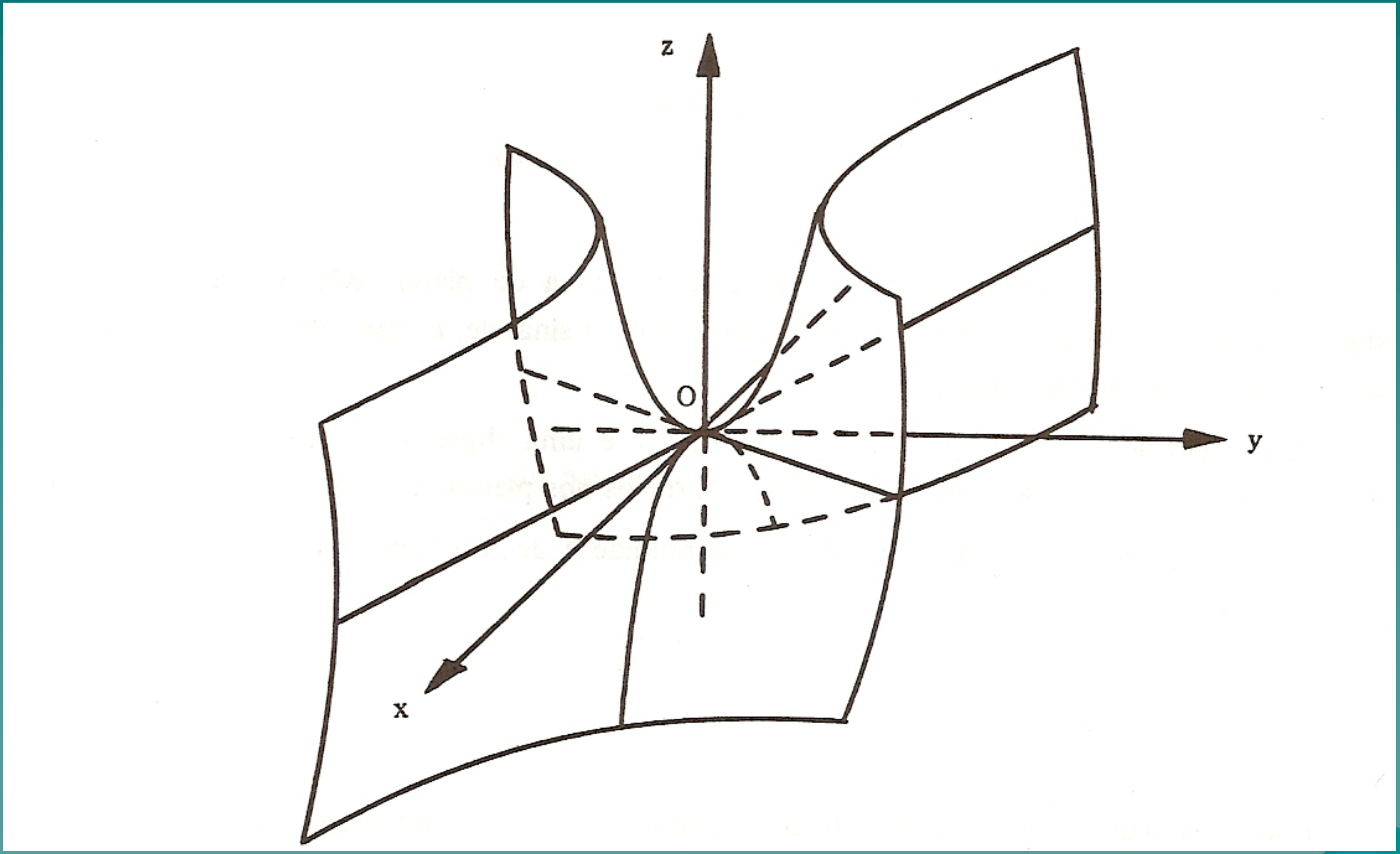
isto é: $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0, \quad z = 0$ e $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0, \quad z = 0$ e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas:

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad x = 0$$

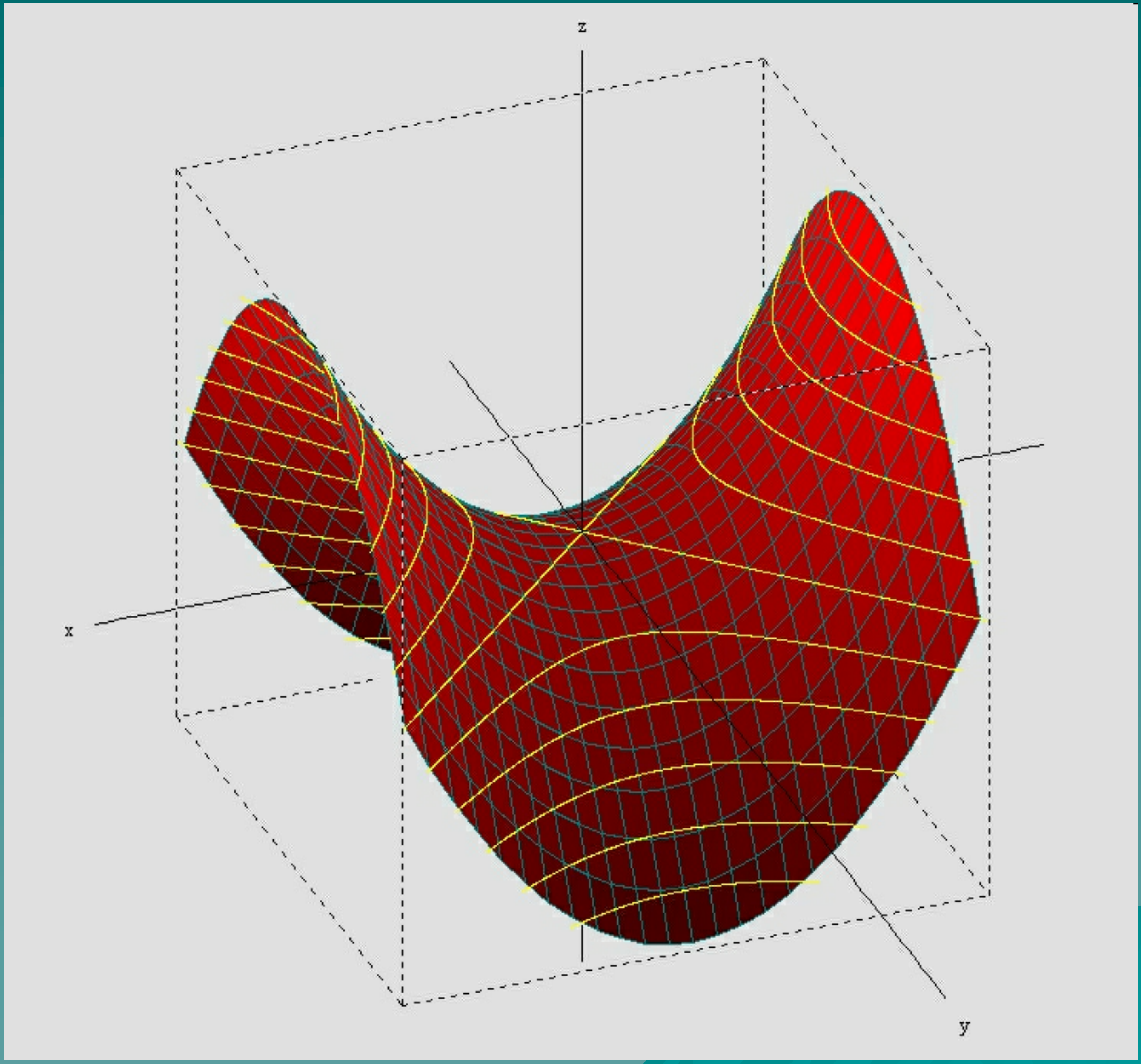
que têm o eixo dos z como eixo de simetria e concavidade para baixo e para cima, respectivamente.

O traço no plano $z = k$ é uma hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo dos y se $k > 0$ e paralelo ao eixo dos x se $k < 0$. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

# PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO



# PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO



## ***EXEMPLO***

- Reduzir a equação à forma canônica, identificar e construir o gráfico da quádrica que ela representa.

$$-9x^2 + 4y^2 - 36z = 0$$

- Represente a quádrica no ***Geogebra*** (Janela 3D)

# QUÁDRICAS DEGENERADAS

O gráfico da equação geral $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$ poderá representar quádricas degeneradas. Alguns exemplos são:

*a*) $x^2 - 16 = 0$; dois planos paralelos: $x = 4$ e $x = -4$.

*b*) $3y^2 = 0$; um plano: o plano $y = 0$.

*c*) $x^2 + 2y^2 = 0$; uma reta: o eixo dos $z$.

*d*) $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$; um ponto: a origem $(0, 0, 0)$.

*e*) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = -3$; o conjunto vazio.

***Para complementar essa introdução, fazer a Parte 1 do TG de Quádricas***

*Bom trabalho!*