Monitoria Macro - 4-9

Lista 1 - questão 1

a) O problema do Planejador Central é dado por:

$$\max_{\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum \beta^t \ln c_t \right\} \quad \text{s.a} \quad c_t + k_{t+1} \leq z_t k_t^{\alpha}$$

Escrevendo na forma recursiva:

$$V(k, z) = \max_{0 \leq k' \leq z k^{\alpha}} \left\{ \ln(z k^{\alpha} - k') + \beta E\{ V(k', z' | z) \} \right\}$$

b) Definindo $V_H(k) = V(k, z = z_H)$ e $V_L(k) = V(k, z = z_L)$

temos:

$$V_H(k) = \max_{k'} \left\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta \cdot \left[p \cdot V_H(k') + (1-p) V_L(k') \right] \right\}$$

$$V_L(k) = \max_{k'} \left\{ \ln(z_L k^{\alpha} - k') + \beta \cdot \left[p \cdot V_L(k') + (1-p) V_H(k') \right] \right\}$$

Partindo do chute inicial $V_H^0(k) = V_L^0(k)$, temos

$$V_H^{(1)}(k) = \max_{0 \leq k'} \left\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta \left[p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0 \right] \right\}$$

$$= \max_{0 \leq k'} \left\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') \right\}$$

ln decrescente em k'.

Logo $k' = 0$

$$V_H^{(1)}(k) = \ln z_H + \alpha \ln k$$

Analogamente para $V_L^{(1)}(k)$

$$V_L^{1}(k) = \max_{0 < k'} \left\{ \ln(z_L k^{\alpha} - k') + \beta \cdot 0 \right\}$$

ln decrescente em k', logo no ótimo $k' = 0$

$$V_L^{(1)}(k) = \ln z_L + \alpha \ln k.$$

2^a iteração:

$$V_H^{(2)}(k) = \max_{k'} \left\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta\left[p V_H^{1}(k') + (1-p) V_L^{1}(k')\right] \right\}$$

$$= \max_{k'} \cdot \left\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta p \cdot (\ln z_H + \alpha \ln k') + \right.$$

$$\left. \beta(1-p)\left[\ln z_L + \alpha \ln k'\right] \right\}$$

CPO:

$$\frac{-1}{z_H k^{\alpha} - k'} + \beta p \frac{\alpha}{k'} + \beta(1-p) \cdot \frac{\alpha}{k'} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{z_H k^{\alpha} - k'} = \frac{\alpha \beta}{k'} \quad \rightarrow \quad k'(1 + \alpha\beta) = \alpha\beta \cdot z_H k^{\alpha}$$

$$k' = \frac{z_H \alpha\beta \cdot k^{\alpha}}{1 + \alpha\beta}$$

Substituindo k' em $V_H^{2}(k)$

$$V_H^{2}(k) = \alpha \ln k + \beta \cdot \alpha^{2} \cdot \ln k + B_2$$

agrupei todos os termos que não tem k

$$V_H^{2}(k) = \alpha(1+\alpha\beta)\cdot \ln k + B_2 = A_2 \ln k + B_2$$

em que $A_2 = \alpha(1+\alpha\beta)$

A otimização para $V_L^{2}(k)$ é análoga

$$V_L^{(2)}(k) = \max_{k'} \Big\{ \ln(z_L k^{\alpha} - k') + \beta\cdot\big[p\cdot(\ln z_L + \alpha \ln k')$$

$$+ (1-p)\cdot(\ln z_H + \alpha \ln k')\big]\Big\}$$

CPO:

$$\frac{-1}{z_L k^{\alpha} - k'} + \frac{\beta\alpha}{k'} = 0 \rightarrow k' = \frac{\alpha\beta\cdot z_L k^{\alpha}}{1+\alpha\beta}$$

Substituindo:

$$V_L^{(2)}(k) = \underbrace{\alpha \ln k + \beta\cdot\alpha^{2} \ln k}_{A_2} + B_2$$

termos que não dependem de k

$$= \alpha(1+\alpha\beta)\ln k + B_2$$

3^{a} Iteração:

$$V_H^{(3)}(k) = \max_{k'} \Big\{\ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta\big[p\, V_H^{2}(k') + (1-p)\, V_L^{2}(k')\big]\Big\}$$

$$= \max_{k'} \Big\{ \ln(z_H k^{\alpha} - k') + \beta p\cdot(A_2 \ln k' + B_2) + \beta(1-p)\cdot(A_2 \ln k' + B_2)\Big\}$$

CPO:

$$\frac{-1}{z_H k^{\alpha} - k'} + \frac{\beta p\cdot A_2}{k'} + \frac{\beta(1-p) A_2}{k'} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\beta A_2}{k'} = \frac{1}{z_H k^{\alpha} - k'} \rightarrow k' = \frac{\beta A_2\cdot z_H k^{\alpha}}{1+\beta A_2}$$

Substituindo em $V_H^{(3)}(k)$

$$V_H^{(3)}(k') = \alpha \ln k + \beta A_2 \alpha \ln k + B_3$$

$$= \ln k . \alpha (1 + \beta A_2) + B_3$$

$$= \ln k' . A_3 + B_3$$

$$A_3 = \alpha (1 + \beta A_2)$$

~ Fazendo a mesma coisa para $V_L^3(k')$

$$V_L^3(k) = \max_{k'} \{ \ln(z_L k^{\alpha} - k') + \beta . p (A_2 \ln k' + B_2)$$

$$+ \beta(1-p)(A_2 \ln k' + B_2) \}$$

CPO é:

$$\frac{-1}{z_L k^{\alpha} - k'} + \beta p \frac{A_2}{k'} + \frac{\beta(1-p) A_2}{k'} = 0$$

$$\rightarrow k' = \frac{\beta A_2 . z_L k^{\alpha}}{1 + \beta A_2}$$

$$V_L^3(k) = \alpha \ln k + \beta A_2 . \alpha \ln k + B_3$$

$$= \ln k (1 + \beta A_2) . \alpha + B_3$$

$$= A_3 \ln k' + B_3$$

$$A_3 = (1 + \beta A_2) \alpha .$$

Repare que as próximas iterações serão:

$V_H^4(k) = A_4 \ln k + B_4$, $V_L^4(k) = A_4 \ln k + B_4$;

$A_4 = \alpha(1+\beta A_3)$

e assim sucessivamente.

Estamos interessados nos termos A_i, que convergirão para: $A_{i+1} = A_i = A \rightsquigarrow A = \alpha(1+\beta A)$

$$\rightsquigarrow A = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

e a função política será dada por:

$$k' = \phi(k,z) = \frac{\beta . A . z k^{\alpha}}{1+\beta A} = \frac{\beta . \alpha . z k^{\alpha}}{(1-\alpha\beta) \cdot \left(1+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)}$$

$$= \boxed{\alpha\beta \cdot z k^{\alpha}}$$

Lista 1 - questão 6

a) Problema do Planejador central na forma recursiva:

$$V(k,\theta) = \max_{k'} \left\{ u_\theta(k^\alpha + (1-\delta)k - k') + \beta E\left[V(k',\theta')\right] \right\}$$

Em que $u_\theta(c) = \theta_t \cdot \dfrac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$

b) Resolvendo o problema sem incerteza com $\theta = 1$

temos $V(k) = \max_{k'} \left\{ u(k^\alpha + (1-\delta)k - k') + \beta V(k') \right\}$

CPO: $-u'(c) + \beta V'(k') = 0 \rightarrow u'(c) = \beta V'(k')$

Envelope:

$$V'(k) = u'(c) \cdot (\alpha k^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

Adiantando um período:

$$V'(k') = u'(c') \cdot (\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

Euler: $u'(c) = \beta u'(c') \cdot (\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)$

Em estado estacionário, $c = c' \rightarrow$

$u'(c) = u'(c') \rightarrow 1 = \beta(\alpha k_{ss}^{\alpha-1} + 1 - \delta)$

$$\rightarrow k_{ss} = \left[(1/\beta - (1-\delta)) / \alpha \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

c) Ver código. Usei 400 pontos acima e abaixo do estado estacionário ao invés de 50.

d) Breve comentário sobre o gerador de cadeias de Markov: Criei uma função à parte que gera n realizações de uma cadeia de Markov com matriz de transição PI, vetor de estados s, a partir do estado inicial s0.

A ideia da função é a seguinte:

Calculo uma matriz com as probabilidades acumuladas por linha, cum-PI. No caso de

$$PI = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\text{cum PI} = \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}15 & 0{,}85 & 1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 & 1 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 & 1 \end{bmatrix}$$

Sorteio um número aleatório de uma uniforme entre 0 e 1, digamos 0,3.

Supondo que estamos no estado 2 (2ª linha), veja onde esse número aleatório (0,3) se encaixa de forma a ficar entre dois elementos. Ele se encaixa entre 0,1 e 0,9 (2º e 3º elementos), Neste caso o próximo estado será o 2.

A correlação entre consumo e investimento é próxima a −1.
Repare que a matriz de transição tem uma característica de ter alta chance de, caso o estado atual seja diferente do 2º, de retornar pro 2º estado. Transições para estados diferentes do 2º são "passageiras"!

d) A correlação diminui entre as variáveis, em módulo. Repare que uma vez em um estado, com essa nova matriz de transição, há uma probabilidade maior de permanecer neste, ao invés de retornar pro 2º estado como em c, transições não são mais passageiras. Investimento varia muito mais que anteriormente, passando mais tempo fora do estado estacionário.
No estado estacionário, o investimento é dado por
$\ln A = K_{ss}^{\alpha} - C_{ss}$