
Lógica

Aula 4

Renata Wassermann

`renata@ime.usp.br`

2020

Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

Eliminação

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e1}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e2}$$

Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e$$

Introdução

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi} \neg\neg_i$$

Regras de eliminação da implicação

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_e$$

Modus Tollens (MT)

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} MT$$

Introdução da Implicação

$$\frac{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow i$$

Exemplos

- $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$

Exemplos

- $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$
- $q \rightarrow r \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Exemplos

- $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$
- $q \rightarrow r \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

$q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg r \vdash p \rightarrow r$

1. $q \rightarrow r$
2. $\neg q \rightarrow \neg r$
3. p
4. $\neg r$ \neg i (3)
5. $\neg q$ MT (2,4)
6. q \neg e (5)
7. r MP(1,6)
8. $p \rightarrow r$ \rightarrow i(3-7)

$$q \rightarrow r \vdash ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

1. $q \rightarrow r$
2. $\neg q \rightarrow \neg p$
3. p
4. $\neg p$ \neg i (3)
5. $\neg q$ MT (2,4)
6. q \neg e (5)
7. r MP(1,6)
8. $p \rightarrow r$ \rightarrow i(3-7)
9. $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$ \rightarrow i(2-8)

$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	
3.	p	
4.	$\neg p$	$\neg e$ (3)
5.	$\neg q$	MT (2,4)
6.	q	e (5)
7.	r	MP(1,6)
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ (3-7)
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ (2-8)
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ (1-9)

Dedução

De uma prova para

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

obtemos uma prova para

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow \dots (\varphi_n \rightarrow \psi) \dots))$$

(e vice-versa).

Regras da disjunção

Introdução

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

Regras da disjunção

Introdução

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

Eliminação

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{|c|} \hline \phi \\ \vdots \\ \xi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \vdots \\ \xi \\ \hline \end{array}}{\xi} \vee_e$$

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$
- $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$

Exemplos

- $p \vee q \vdash q \vee p$
- $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$
- $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Equivalências

- $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Equivalências

- $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg q \rightarrow \neg p$

Lei do Terceiro Excluído (Tertium non datur)

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi} \text{LTE}$$

Exemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

Contradições

$$\phi \wedge \neg\phi \text{ ou } \neg\phi \wedge \phi$$

Contradições

$$\phi \wedge \neg\phi \text{ ou } \neg\phi \wedge \phi$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$$

Contradições

$$\phi \wedge \neg\phi \text{ ou } \neg\phi \wedge \phi$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$$

$$(r \wedge (s \vee t)) \wedge \neg(r \wedge (s \vee t))$$

Contradições

$$\phi \wedge \neg\phi \text{ ou } \neg\phi \wedge \phi$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$$

$$(r \wedge (s \vee t)) \wedge \neg(r \wedge (s \vee t))$$

Todas as contradições são equivalentes!

Novo símbolo: \perp

Regras da Negação

Eliminação

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg_e$$

Regras da Negação

Eliminação

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg_e$$

Introdução

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg\phi} \neg_i$$

Regras da Negação

Eliminação

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} \neg_e$$

Eliminação do \perp

$$\frac{\perp}{\phi} \perp_e$$

Introdução

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg\phi} \neg_i$$

Exemplos

- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$

Exemplos

- $p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$
- $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$