MAT122 - Álgebra Linear – Lista 4

1. Sejam A e B matrizes 4×4 invertíveis tais que

$$\text{Det}\left(3B^3\left(A^2B^2\right)^{-1}\right) = 162, \qquad \text{Det}B = 2\text{det}A^t.$$

Determine os valores de $\text{Det}A$ e $\text{Det}B$.

2. Mostre que se $T : V \to V$ é uma transformação linear idenpotente onde V é um espaço vetorial de dimensão n, então T é diagonalizável. Escreva a matriz de T em uma base qua a torne diagonal.

3. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A + A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.
   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.
   (c) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

4. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A - A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.
   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.
   (c) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

5. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^2$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (iv) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(h)

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

6. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (iv) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

   (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

   (c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 1$ é uma raíz do polinômio característico.

(e)
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

(f)
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

(g)
$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

7. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule (sem auxílio de calculadora ou computador) a matriz A^{2020}. Justifique claramente como o cálculo foi efetuado.

   (b) Encontre (sem auxílio de calculadora ou computador) uma matriz C tal que $C^2 = A$. Justifique claramente como o cálculo foi efetuado.

   DICA: Se B é uma matriz invertível e $n \in \mathbb{N}$, então $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$ e portanto $A^n = B^{-1}(BAB^{-1})^nB$. Escolha uma base boa para fazer as contas!

8. Seja A uma matriz 2×2 tal que $A^t = A$. Mostre que A é diagonalizável.

   OBS: O resultado vale mais geralmente para qualquer matriz $n \times n$ simétrica.