MAT122 - Álgebra Linear – Lista 3

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Sabendo que $T(-1, 2) = (0, 3)$ e $T(2, 1) = (-2, 0)$, determine $T(1, 1)$.

2. Sejam A e B duas matrizes $m \times n$. Mostre que se $AX = BX$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$ (pensando em X como uma matriz $n \times 1$), então $A = B$. Dê um exemplo de duas matrizes 2×2 e um vetor $X \in \mathbb{R}^2$ tais que $X \neq 0$, $AX = BX$, mas $A \neq B$ (isto mostra que na primeira afirmação é importante que $AX = BX$ *para todo* $X \in \mathbb{R}^n$).

3. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear e sejam $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vetores linearmente independentes de W. Mostre que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores de V tais que $T(v_i) = w_i$, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. A recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes então $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ são linearmente independentes? Prove ou dê um contra exemplo.

4. Seja V um espaço vetorial e $T : V \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Suponha que $N(T) \neq V$ (onde $N(T)$ é o núcleo de T) e seja $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) \neq 0$.
   (a) Mostre que todo elemento $v \in V$ pode ser escrito da forma $v = w + av_0$ onde $w \in N(T)$ e $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Seja $S = [v_0]$ o subespaço gerado por v_0. Mostre que $V = S \oplus N(T)$.
   (c) Mostre que se $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de $N(T)$, então $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ é base de V.

5. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Mostre que se $v_1, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes então $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in W$ são linearmente independentes.

6. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V > \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $N(T) \neq \{0\}$.

7. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V < \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $\mathrm{Im}(T) \neq W$.

8. Sejam $F : V \to W$ e $G : W \to U$ aplicações lineares. Mostre que:
   (a) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} G)$.
   (b) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} F)$.

9. Seja V o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens.
   (a) Seja $D : V \to V$ a transformação $D(f) = f'$ que associa a cada função a sua derivada. Mostre que D é uma aplicação linear.
   (b) Mostre que o núcleo de D é o subespaço das funções constantes (que é isomorfo a $\mathbb{R}$)
   (c) Seja $D^2 = D \circ D : V \to V$ a transformação que associa a cada função a sua segunda derivada. Mostre que o núcleo de D^2 é o subespaço das funções da forma $N(D^2) = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.
   (d) Determine o núcleo da transformação $D^n : V \to V$ que associa a cada função a sua n-ésima derivada.

10. Seja $T : \mathcal{M}_{4\times 4} \to \mathcal{M}_{4\times 4}$ a transformação dada por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2},$$

onde A^t denota a transposta da matriz A.

(a) Mostre que a imagem de T é o subespaço das matrizes simétricas

$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{M}_{4\times 4} : B = B^t\}.$$

(b) Mostre que $N(T)$ é o subespaço das matrizes anti-simétricas

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{M}_{4\times 4} : B = -B^t\}.$$

(c) Mostre que $\dim\mathcal{S} + \dim\mathcal{A} = 16$.

(d) Mostre que $\mathcal{M}_{4\times 4} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

11. Uma transformação linear $T : V \to V$ é dita **idenpotente** se $T^2 = T$ onde $T^2 = T \circ T$. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear idenpotente.

(a) Mostre que $V = N(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(b) Escreva a matriz da transformação T em termos de uma base $B = (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ onde $(v_1, \ldots, v_p)$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de $N(T)$.

(c) Verifique que a aplicação do exercício anterior é idenpotente.

(d) Mostre que a transformação linear

$$F = I - T : V \to V, \quad F(v) = v - T(v)$$

também é idenpotente.

(e) Mostre que $N(F) = \mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Im}(F) = N(T)$.

OBS: Uma transformação linear idenpotente muitas vezes também é chamada de uma projeção.

12. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo e seja $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por

$$T_v(w) = \frac{< v, w >}{||v||^2} v,$$

onde $< v, w >$ denota o produto escalar de v com w.

(a) Mostre que T_v é uma aplicação linear idenpotente.

(b) Mostre que $N(T) = v^\perp$, onde $v^\perp$ é o plano que passa pela origem e que tem v como um vetor normal.

(c) Conclua que $\mathbb{R}^3 = v^\perp \oplus [v]$.

13. Seja T_v a aplicação linear do exercício anterior. Seja $v = (-1, 1, 2)$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Escreva as matrizes das transformações T_v e $I - T_v$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

14. O produto escalar (ou produto interno) de $\mathbb{R}^n$ é a função

$$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad < (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Mostre que a função

$$T_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad T_u(v) =< u, v >$$

é uma aplicação linear. Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$, escreva a matriz da aplicação linear T_u com respeito as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$.

15. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ os vetores que formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou seja

$$e_i = (x_1, \ldots, x_n) \text{ com } x_i = 1 \text{ e } x_j = 0 \text{ para todo } j \neq i.$$

Mostre que a função

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(u) = (< e_1, u >, < e_2, u >, \ldots, < e_n, u >)$$

é uma aplicação linear. Determine a sua matriz com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

16. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o seu complemento ortogonal como sendo

$$S^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n :< u, v >= 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$

Mostre que $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$.

17. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em S como sendo a função

$$P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definida pelas seguintes condições:

- P_S é linear;
- $P_S(u) \in S$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$;
- $u - P_S(u) \in S^{\perp}$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que

(a) $P_S \circ P_S = P_S$.

(b) A imagem de P_S é S.

(c) O núcleo de P_S é $S^{\perp}$.

(d) $P_{S^{\perp}} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} - P_S$ onde $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade (ou seja $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}(u) = u$) e $P_{S^{\perp}}$ denota a projeção ortogonal no subespaço $S^{\perp}$.

(e) $P_{S^{\perp}} \circ P_{S^{\perp}} = P_{S^{\perp}}$.

(f) A imagem de $P_{S^{\perp}}$ é $S^{\perp}$.

(g) O núcleo de $P_{S^{\perp}}$ é S.

(h) $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

18. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Denote por $u_1, \dots u_m \in \mathbb{R}^n$ os vetores formados pelas linhas de A e por $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^m$ os vetores formados pelas colunas de A. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear determinada pela matriz A, i.e., $T_A(X) = A \cdot X$ onde pensamos em vetores de R^n (respectivamente R^m) como matrizes com uma coluna e n linhas (respectivamente m linhas). Mostre que
    (a) $\mathrm{Im}(T_A) = [v_1, \dots, v_n]$.
    (b) $N(T_A)^\perp = [u_1, \dots u_m]$.
    (c) A quantidade de linhas linearmente independentes de A é igual a quantidade de colunas linearmente independentes de A.

19. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ e considere a seguinte função:
$$< \ , \ >: V \times V \to \mathbb{R}, \quad < p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$
    (a) Mostre que $< \ , \ >$ é um produto interno.
    (b) Encontre uma base ortonormal de $(V, < \ , \ >)$.
    (c) Seja $S = \{p(t) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$. Determine uma base de $S^\perp$.
    (d) Determine a projeção ortogonal de $p(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ em S.

20. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens e seja $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o subespaço gerado por $S = [\mathrm{sen}x, \cos x]$. Seja $D : S \to S$ a aplicação linear que associa a cada função a sua primeira derivada. Qual é a matriz da transformação D com respeito a base $B = (\mathrm{sen}x, \cos x)$ de S?

21. Considere a aplicação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por
$$T(p(t)) = p'(t) + p'(1) - 2p(0) + p(t).$$
    (a) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1, t, t^2)$.
    (b) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1 + t, 1 - t, 1 - t^2)$.