MAT122 - Álgebra Linear 1 – Lista 2

1. Verifique se os subespaços S_1 e S_2 do espaço vetorial V satisfazem $S_1 \subset S_2$, $S_2 \subset S_2$ $S_1 = S_2$ ou nenhuma das acima (nesse caso encontre uma base de $S_1 \cap S_2$).
   (a) $S_1 = [(1,0,0),(0,1,0)]$ e $S_2 = [(1,1,0),(1,-1,0)]$, quando $V = \mathbb{R}^3$.
   (b) $S_1 = [\text{sen}2t, \cos 2t, \text{sen}t\cos t]$ e $S_2 = [1, \text{sen}2t, \cos 2t]$, quando $V = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f \text{ é contínua }\}$.
   (c) $S_1 = [1, t, t^2, t^3]$ e $S_2 = [1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2]$, quando $V = P_3(\mathbb{R})$.

2. Ache uma solução não trivial para o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + y + z - w = 0 \\ 3x - 2y + z - 2w = 0. \end{cases}$$

   A partir desta solução, obtenha uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (3,1,1)$, $v_4 = (4,-1,-2)$ na qual os coeficientes não são todos iguais a zero.

3. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, onde V é um espaço vetorial. Sejam $a_2, \ldots, a_n$ números reais não nulos. Mostre que se os vetores $v_1, \ldots v_n$ são linearmente independentes então os vetores

$$v_1, v_1 + a_2v_2, v_1 + a_3v_3, \ldots, v_n + a_nv_n$$

   são linearmente independentes. Você consegue mostrar a recíproca?

4. Sejam V um espaço vetorial e $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $v \in V$. O conjunto $A = \{v, v-e_1, v-e_2, v-e_3\}$ é um conjunto de geradores de V? O conjunto A pode ser linearmente independente? Justifique.

5. Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços vetoriais abaixo:
   (a) $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = w \text{ e } x - 3y + w = 0\}$
   (b) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : AB = BA\}$ onde B é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c) $S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1) = 0\}$.
   (d) $S = \{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} : a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Em $V = \mathbb{R}^4$ considere o subespaço S gerado por $v_1 = (-1,0,0,1)$ e $v_2 = (0,-1,-2,3)$. Encontre um sistema de equações lineares com 4 incógnitas tal que S é o conjunto de soluções do sistema.

7. Seja $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$ o espaço das matrizes 3×3 com entradas reais e considere

$$S = \{(a_{ij}) \in V : a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}\}.$$

   (a) Mostre que S é um subespaço de V.
   (b) Encontre uma base de S e determine $\dim S$.
   (c) Encontre uma base de V que contém a base que você encontrou no item anterior.

8. Seja $B = (1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3)$. Verifique que B é uma base de $P_3(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de x^3 na base B.

9. Seja $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ e considere os seguintes elementos de V:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostre que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de V.
   (b) Determine $m, n, r, s \in \mathbb{R}$ tais que $P = A$ onde

$$P = (m, n, n, m)_B, \quad A = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 2 & s \end{pmatrix}$$

10. Considere os polinômios

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^3, \quad p_2(x) = x + x^2 - x^3, \quad p_3(x) = a + x + bx^2 + 5x^3,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que p_1, p_2 são linearmente independentes.
   (b) Mostre que p_1, p_3 são linearmente independentes para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
   (c) Existe algum valor de $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $p_2(x), p_3(x)$ são linearmente dependentes?
   (d) Determine todos os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a dimensão do espaço gerado por p_1, p_2 e p_3 seja 2.

11. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\}, \quad S_2 = \{A \in V : \mathrm{tr}A = 0\},$$

onde A^t denota a matriz transposta de A e $\mathrm{tr}A$ é o traço de A (a soma dos elementos da diagonal principal de A.

   (a) Mostre que S_1 e S_2 são subespaços de V.
   (b) Determine uma base e a dimensão de S_1.
   (c) Determine uma base e a dimensão de S_2.
   (d) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

(e) Complete a base de $S_1 \cap S_2$ encontrada acima para uma base de V.

12. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\}, \quad S_2 = \{A \in V : A = -A^t\},$$

onde A^t denota a matriz transposta de A.

(a) Determine uma base e a dimensão de S_1.

(b) Determine uma base e a dimensão de S_2.

(c) Mostre que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

(d) Escreva a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

como uma soma de uma matriz em S_1 e uma em S_2.

13. Seja $V = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ o espaço vetorial das transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Denote por $< \cdot, \cdot >$ o produto interno Euclidiano de $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) > = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Considere os seguintes subconjuntos de V:

$$S_1 = \{T \in V : < T(u), v > = < u, T(v) > \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^3\}$$

$$S_2 = \{T \in V : < T(u), v > = - < u, T(v) > \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^3\}.$$

(a) Mostre que S_1 e S_2 são subespaços vetoriais de V.

(b) Mostre que $V = S_1 \oplus S_2$.

(c) Encontre uma decomposição da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ abaixo

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x + y - z, -2y + 3z),$$

ou seja, encontre $T_1 \in S_1$ e $T_2 \in S_2$ tais que $T = T_1 + T_2$.

(**Dica:** Mostre que a função

$$\psi : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{M}_{3\times 3}$$

que associa a cada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a matriz que tem como entrada (i, j) o número

$$T_{ij} = < T(e_i), e_j >$$

é um isomorfismo linear e use o exercício 12. Aqui e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$.)

14. Considere os seguintes subespaços de $P_3(\mathbb{R})$

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : 2p(0) = p(-1) = p(1)\}$$

$$S_2 = [t^3 + t - 1, t^2 - t - 1, t^3 + t^2 - 2],$$

$$S_3 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p'''(t) = 0\}.$$

Seja

$$W = S_1 + (S_2 \cap S_3).$$

(a) Encontre uma base e a dimensão de W.

(b) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais

$$p(t) = at^3 - t^2 + \frac{a^2}{2}t + 2a \in W.$$

15. Em cada um dos exercícios abaixo são dados dois subconjuntos S_1 e S_2 de um espaço vetorial V. Verifique se estes subconjuntos são subespaços de V. Caso sejam subespaços, determine uma base, e a dimensão de $S_1 \cap S_2$, S_1, S_2 e $S_1 + S_2$. Complete cada uma dessas bases para uma base de V. Verifique também se a soma de S_1 com S_2 é uma soma direta.

(a) $V = \mathbb{R}^5$, $S_1 = [(1, 0, 1, -1, 2), (0, 1, -1, 0, -1), (2, -1, 3, -2, 5)]$ (o espaço gerado por esses três vetores e

$$S_2 = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1, \ldots, x_5) \text{ satisfaz o sistema de equações lineares abaixo } \}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + +x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $V = P_3(\mathbb{R})$,

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0 \text{ e } p''' - p'' = 0\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(0) = p(-1), \text{ e } p''(1) - 2p'(-1) = 0\}.$$

(c) $V = \mathcal{M}_{4\times 4}$, S_1 é o conjunto das matrizes triangulares superiores, ou seja, o conjunto de todas as matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ tal que A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{R},$$

e S_2 é o conjunto das matrizes de traço zero, ou seja, o conjunto de todas as matrizes

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}, \text{ tal que } \mathrm{tr}B = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = 0.$$

(d) $V = \mathcal{M}_{n\times n}$,

$$S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A = A^t\}$$

é o conjunto das matrizes simétricas (que são iguais às suas transpostas), e

$$S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A = -A^t\}$$

é o conjunto das matrizes anti-simétricas (que são iguais aos negativos de suas transpostas).

(e) $V = \mathbb{R}^5$,

$$S_1 = [(1, 0, -1, 2, 1), (0, 0, 1, -1, -1)]$$
$$S_2 = [(1, 1, -1, 2, 1), (2, 0, -1, 3, 1), (-1, 1, 1, -2, -1)]$$

onde $[v_1, \ldots, v_k]$ denota o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$.