MAT122 - 2020 - Álgebra Linear 1 – Lista 1

1. Verique se $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}^2\}$ é um espaço vetorial com as operações de soma e produto por escalar dadas abaixo. Caso não seja um espaço vetorial, determine todos os axiomas que falham. Justifique suas respostas.
   (a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (e) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 + 2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y + 2\alpha - 2)$.

2. Seja $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ com as operações de adição e de multiplicação por escalares dadas por: $x \oplus y = xy$ e $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique se V é um espaço vetorial com estas operações.

3. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função definida é ou não uma aplicação linear. No caso em que é uma aplicação linear, determine o núcleo e a imagem da função.
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, y - 2x)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, x + z)$;
   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z, w) = (x - y + 2w, y - x - 2w)$;
   (d) $T_v : V^3 \to \mathbb{R}$, $T_v(w) =< v, w >$ (onde $< v, w >$ denota o produto escalar de v com w e $v \neq 0 \in V^3$.
   (e) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $T(p) = (p(0), p(-1), p(1))$.
   (f) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $T(p)(t) = 2p''(t) - p'(t) + 3p(-1)$, onde $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$
   (g) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A - A^t$,onde A^t denota a matriz transposta de A. Ou seja,
   $$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

4. Seja $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ um polinômio de grau menor ou igual a 2. Mostre que se $p(1) = 0$, então existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que
   $$p(x) = \lambda(x - 1) + \mu(x^2 - 1).$$
   Note a seguinte interpretação geométrica deste resultado: podemos pensar no conjunto
   $$S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subset P_2(\mathbb{R})$$
   como um plano que passa pela origem de $P_2(\mathbb{R})$ e que tem os polinômios $x - 1$ e $x^2 - 1$ como vetores diretores.

5. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x$ é um número inteiro$\}$.
   (c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{det}A \neq 0\}$.
   (d) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{det}A = 0\}$.
   (e) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(t) \geq 0,$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.
   (f) $V = P_5(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_5(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$.
   (g) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(0) = 2p(1)$ e $p(2) = 0\}$.
   (h) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{ax + bx^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicação por escalar usual no espaço de funções. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$S_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) = f(1 + t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) \text{ é um número inteiro para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(s + t) = f(s) + f(t) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}\}.$$

   Determine quais desses conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Justifique sua resposta com uma demonstração.

7. Sejam V, V', W e W' espaços vetoriais e considere o espaço vetorial $\mathcal{F}(V, W)$ das funções de V para W com sua estrutura de espaço vetorial usual, i.e.,

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot (f(v)).$$

   (a) Mostre que $\text{Lin}(V, W) = \{T \in \mathcal{F}(V, W) : T$ é linear $\}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(V, W)$. (OBS: no caso particular em que $W = \mathbb{R}$ denotamos $\text{Lin}(V, \mathbb{R})$ por V^* e chamamos V^* do espaço dual de V.)
   (b) Mostre que a função $T : V \to (V^*)^*$, $T(v)(\psi) = \psi(v)$ para todo $v \in V$ e $\psi \in V^*$ é linear e calcule o núcleo de T, $N(T)$.
   (c) Considere o produto escalar Euclideano de $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

   Mostre que a função $G : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$, $G(v)(w) =< v, w >$ é um isomorfismo linear.

(d) Mostre que se $V \simeq V'$ e $W \simeq W'$ (ou seja V é isomorfo a V' e W isomorfo a W'), então $\mathrm{Lin}(V, W) \simeq \mathrm{Lin}(V', W')$. Escreva um isomorfismo explícito.

(e) Mostre que $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo ao espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Encontre um isomorfismo explícito $\psi : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(f) Considere a função $F : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ que associa para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a sua matriz transposta A^t (lembre que a matriz transposta de A é a matriz que tem como sua i-ésima coluna a i-ésima linha de A). Mostre que F é um isomorfismo linear.

(g) Conclua que $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo a $\mathrm{Lin}((\mathbb{R}^m)^*, (\mathbb{R}^n)^*)$. Você consegue escrever um isomorfismo explícito?

8. Considere o conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \right\}$$

e as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\lambda & b^\lambda \\ c^\lambda & d^\lambda \end{pmatrix}$$

Considere também o seguinte subconjunto de V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : ad = 1 \text{ e } ac = 1 \right\}.$$

(a) Mostre que V com as operações definidas acima é um espaço vetorial.

(b) Mostre que S é um subespaço vetorial.

(c) Considere a aplicação

$$T : V \to V, \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & a^{-1}b \\ cd & c^2 d \end{pmatrix}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

(d) Mostre que a imagem de T é o subespaço

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x^{-1} \\ y & z \end{pmatrix} \in V : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0, y > 0, z > 0 \right\}.$$

(e) Mostre que o núcleo de T é o subespaço

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V : a > 0 \right\}.$$