MAE 224 - PROBABILIDADE II
Terceira Lista de Exercícios - Classe
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Prove que X_n não converge quase certamente para 0.

Solução: Usaremos o corolário 3.2.1. Seja o evento $A_k = \{w : X_n > \frac{1}{m}\}$. Portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(a série harmônica).

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Prove que $\max\{X_1, ..., X_n\}$ converge quase certamente para θ.

Solução:
Seja o evento $A_k = \{w : |\max\{X_1, ..., X_k\} - \theta| > \frac{1}{m}\}$. Portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\max\{X_1, ..., X_k\} < \theta - \frac{1}{m}) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{i=1}^{k} P(X_i < \theta - \frac{1}{m}) = \sum_{k=1}^{\infty} (P(X_1 < \theta - \frac{1}{m}))^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\theta - \frac{1}{m}}{\theta})^k < \infty.$$

A série é geométrica com razão menor do que 1, portanto convergente. Como o resultado é independente do valor de m, vale para qualquer m.

Pelo Corolário 3.2.1 temos que $\max\{X_1, ..., X_n\}$ converge quase certamente para θ.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuidas com segundo momento finito. Defina

$$Z_n = (\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Use a Lei dos Grandes Números e prove que Z_n converge quase certamente para um valor c. Qual o valor de c?

Solução: Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias positivas, independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito. Cosidere

$$Z_n = (\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Como $E[X_i^2] < \infty$, $E[X_i] = \mu$, existe.

logo X_i é integrável e tem variância finita, denotaremos e $Var(X_i) = \sigma^2$.

Definimos $W_n = \ln(Z_n)$ e temos

$$W_n = \frac{1}{n}\ln(\prod_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

Como ln é uma função côncava, pela desigualdade de Jensen

$$E[\ln X_i] \leq \ln E[X_i] = \ln\mu < \infty,$$

definiremos $E[\ln(X_i)] = \mu_*$.

Como W_n é a média aritmética das variáveis $\ln X_i$ independentes, identicamente distribuídas e integráveis com média μ_*, , pela lei forte de Kolmogorov, $\ln(Z_n) = W_n \to^{qc} \mu_*$. Desde que a função exponencial, e^x, é contínua, vale

$$Z_n = e^{W_n} \to^{qc} e^{\mu_*} = e^{E[\ln X_i]}.$$

4) Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas por $X_n = \ln\{\frac{1}{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}}\}$. Prove que X_n converge quase certamente para uma variável aleatória Y. Qual a distribuição de Y?

Solução:

Observe que

$$X_n = \ln(\frac{1}{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}}) = -\ln(1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} -\ln\{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}\} =$$

$$-\ln\{1-X+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\} = -\ln(1-X)$$

a penúltima igualdade vale pois o logaritmo é uma função contínua. Como o limite independe de $w \in \Omega$, $N^c = \{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = -\ln(1-X(w))\}$ é tal que $P(N^c) = 1$.

Agora definiremos $Y = -\ln(1-X)$ e calcularemos sua função de distribuição acumulada.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln(1-X) \leq y) = P(1-X \geq e^{-y})$$

$$= P(X \leq 1-e^{-y}) = 1-e^{-y}I_{(0,\infty)}(y),$$

pois a função de distribuição acumulada de $X \sim U(0,1)$ é $F(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[0,\infty)}(x)$.

Logo X_n converge quase certamente para uma distribução exponencial.