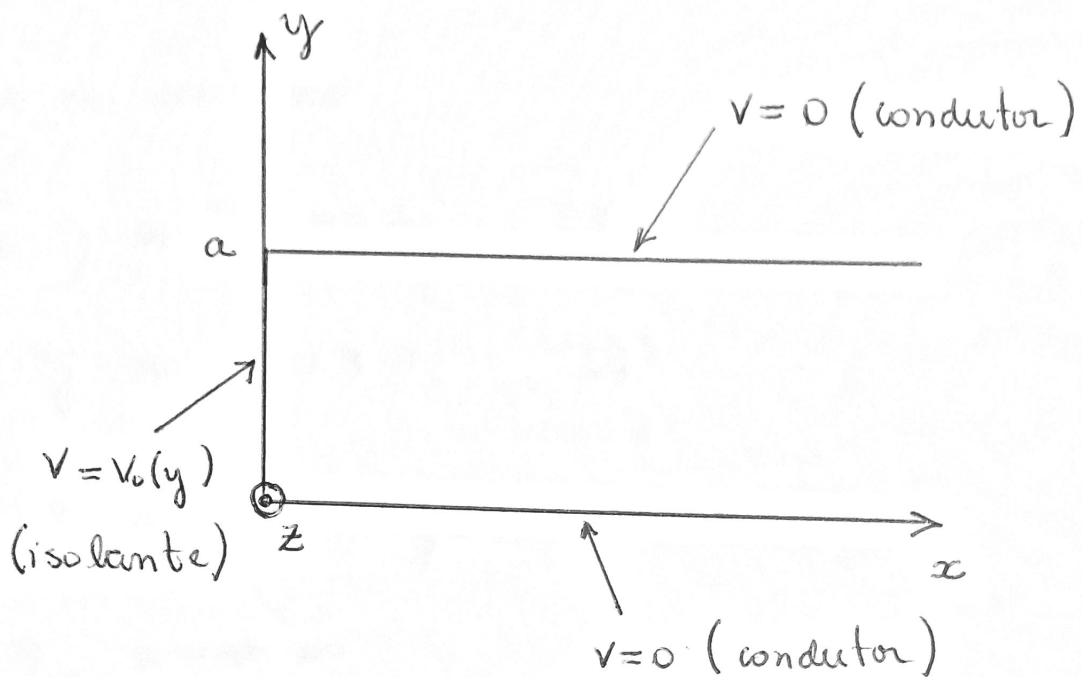


11/09/2020

1

Separação de variáveis

Coordenadas cartesianas



O desenho acima ilustra a seção transversal ao eixo  $z$  de um arranjo formado de duas placas metálicas semi-infinitas paralelas ao plano  $xz$  em  $y=0$  e  $y=a$  e aterradas. Na extremidade esquerda, uma faixa infinita ao longo do eixo  $z$  entre as placas é feita de material isolante e mantida a potencial  $V_0(y)$ .

Equação de Laplace na região de interesse

(2)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

(problema bidimensional)  
por simetria

Condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} V = 0, \quad y = 0 \quad \forall x > 0 \quad (1) \\ V = 0, \quad y = a \quad \forall x > 0 \quad (2) \\ V = V_0(y), \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (3) \\ V \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (4) \end{array} \right.$$

Vamos procurar por soluções da forma

$$V(x, y) = X(x) Y(y)$$

Substituindo  $V(x, y)$  na eq. de Laplace, temos

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

e dividindo por  $V = XY$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{só depende de } x} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{só depende de } y} = 0 \quad \forall x, y \text{ entre as placas}$$

Concluimos então que

(3)

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = K \quad \text{e} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -K \quad (K \text{ cte})$$

Há aqui 3 possibilidades =  $\begin{cases} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{cases}$

$K = 0$  pode ser descartada, pois levaria a soluções do

tipo:

$$X(x) = Ax + B \quad \text{e} \quad Y(y) = Cy + D$$

e nenhuma delas satisfaz as condições de contorno do problema.

$$K = k^2 > 0 = (k > 0)$$

$$\begin{cases} X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx} \\ Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky) \end{cases}$$

$$K = -k^2 < 0$$

$$\begin{cases} X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \\ Y(y) = C e^{ky} + D e^{-ky} \end{cases}$$

↑  
não satisfazem as condições de contorno

logo

(4)

$$V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx}) (C \sin(ky) + D \cos(ky))$$

$$V(x, 0) = (A e^{kx} + B e^{-kx}) D = 0 \quad \forall x > 0 \quad (1)$$

$\Downarrow$

$$D = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, y) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (4)$$

Podemos escrever então

$$V(x, y) = C e^{-kx} \sin(ky)$$

Aplicando agora a condição (2)

$$V(x, a) = C e^{-kx} \sin(ka) = 0 \quad \forall x > 0$$

$\Downarrow$

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

então

$$V_n(x, y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Como combinações lineares de funções harmônicas

(5)

também são harmônicas:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_N V_N) \\ &= \nabla^2 \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \underbrace{\nabla^2 V_i}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

a solução mais geral para esse problema é dada por

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a} x} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

Tal solução deve satisfazer ainda a condição (3)

$$V(0, y) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)}_{\text{série de Fourier}} = v_0(y)$$

série de Fourier

Os coeficientes  $C_n$  podem ser obtidos, já que no intervalo  $0 \leq y \leq a$ , o conjunto de funções

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right); n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \{f_n\}$$

forma uma base ortonormal se o produto escalar entre duas funções da base  $\langle f_n, f_m \rangle$  for definido da seguinte forma

(6)

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m \rangle &= \int_0^a f_n(y) f_m(y) dy \\ &= \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos\left[\left(n-m\right) \frac{\pi}{a} y\right] - \frac{1}{2} \cos\left[\left(n+m\right) \frac{\pi}{a} y\right] \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \cos\left[\left(n-m\right) \frac{\pi}{a} y\right] dy - \frac{1}{2} \int_0^a \cos\left[\left(n+m\right) \frac{\pi}{a} y\right] dy \\ &= \frac{a}{2\pi} \frac{1}{n-m} \sin\left[\left(n-m\right) \frac{\pi}{a} y\right] \Big|_0^a - \frac{a}{2\pi} \frac{1}{n+m} \sin\left[\left(n+m\right) \frac{\pi}{a} y\right] \Big|_0^a \\ &= \frac{a}{2\pi} \frac{1}{n-m} \sin\left[\left(n-m\right) \frac{\pi}{a} y\right] \Big|_0^a = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{a}{2}, & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Na última passagem, usamos o fato de que

(7)

$$\lim_{n \rightarrow m} \frac{1}{n-m} \sin \left[ \frac{(n-m)\pi}{a} y \right] = \frac{\pi y}{a} = \begin{cases} \pi, & y=a \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

Logo

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \left( \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right) dy = \delta_{mn}$$

com  $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$   $\{f_n\}$  é base ortonormal

Voltemos à condição de contorno (3)

$$v(0, y) = v_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left( \frac{n\pi}{a} y \right)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right)$  e

integrando no intervalo  $0 \leq y \leq a$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^a \left[ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left( \frac{n\pi}{a} y \right) \right] \sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right) dy &= \int_0^a v_0(y) \sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^a \sin \left( \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right) dy}_{= \frac{a}{2} \delta_{mn}} = \int_0^a v_0(y) \sin \left( \frac{m\pi}{a} y \right) dy \end{aligned}$$

Então

$$C_m = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right) dy \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Por exemplo, se  $V_0(y) = \sin\left(\frac{q\pi}{a} y\right)$  para  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 0$

então

$$C_m = \begin{cases} 0, & m \neq q \\ 1, & m = q \end{cases}$$

e portanto

$$V(x, y) = e^{-\frac{q\pi}{a} x} \sin\left(\frac{q\pi}{a} y\right)$$

Cigora se  $V_0(y) = V_0 = \text{cte}$

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) dy = -\frac{2V_0}{a} \frac{a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \Big|_0^a$$

$$= -\frac{2V_0}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{2V_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

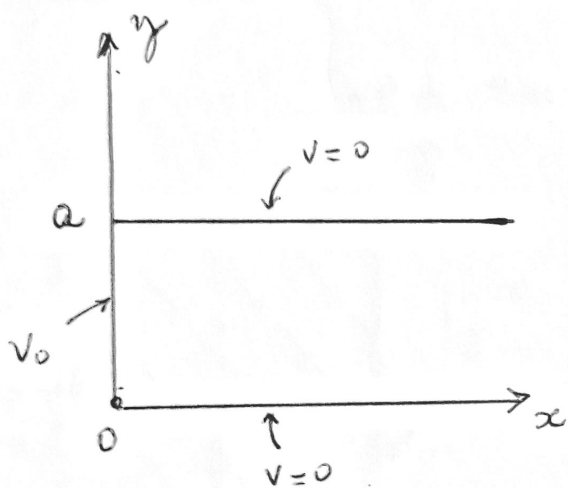
$$= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Dessa forma, p/  $V_0(y) = V_0 = \text{cte}$ :

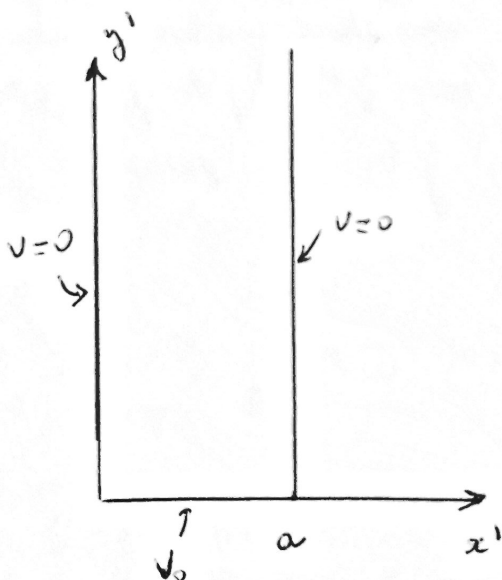
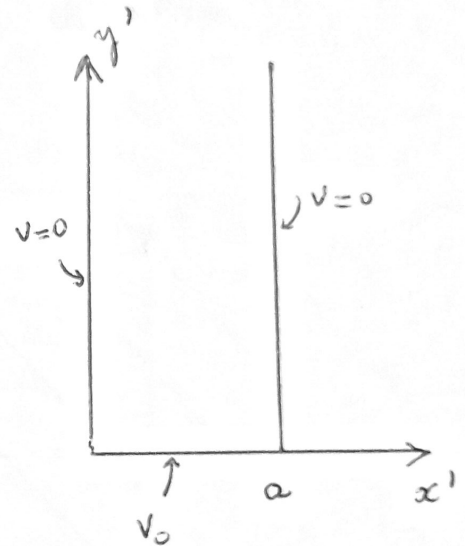
(9)

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{a}x} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{a}y\right]$$

Curiosamente é possível escrever o resultado da série infinita acima para  $V_0(y) = V_0 = \text{cte}$  em forma analítica fechada usando a técnica de mapeamento conforme.



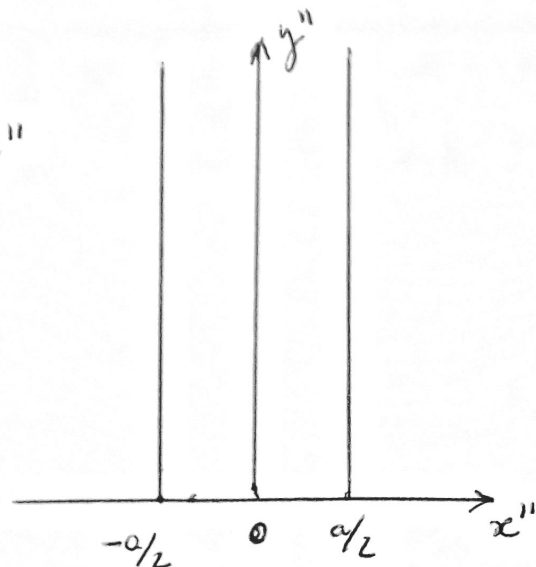
$$\begin{array}{c} x \rightarrow y' \\ \longrightarrow \\ y \rightarrow x' \end{array}$$



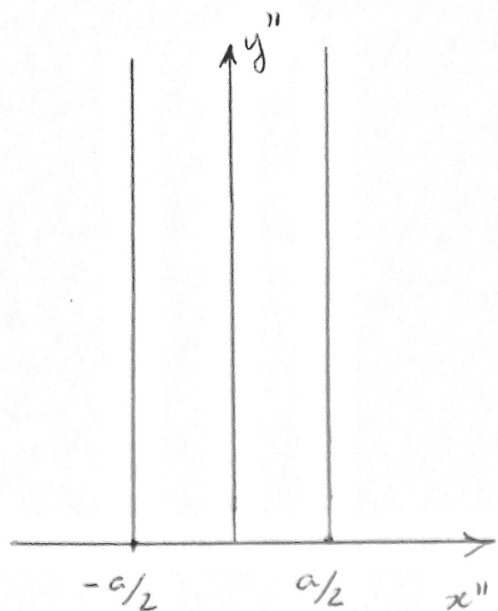
$$x' \rightarrow x' - \frac{a}{2} = x''$$

$$\longrightarrow$$

$$y' \rightarrow y' = y''$$



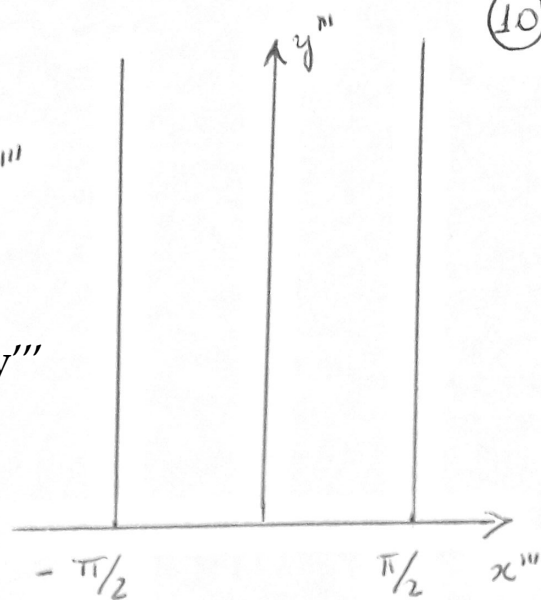




$$x'' \rightarrow x'' \frac{\pi}{a} = x'''$$

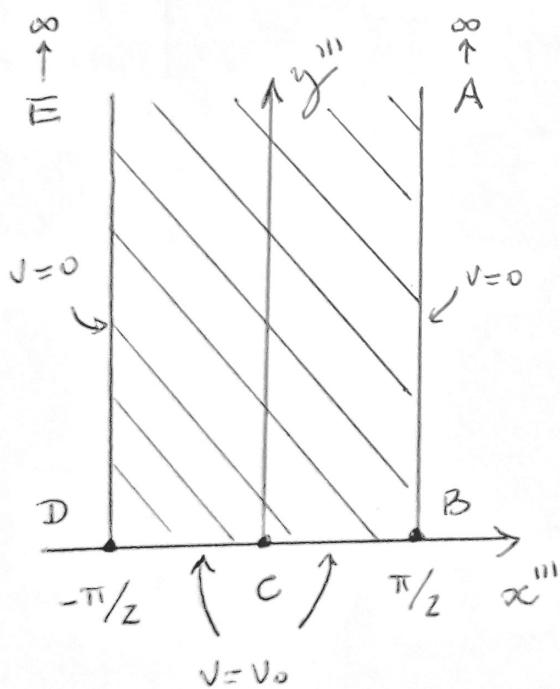


$$y'' \rightarrow y'' \pi/a = y'''$$

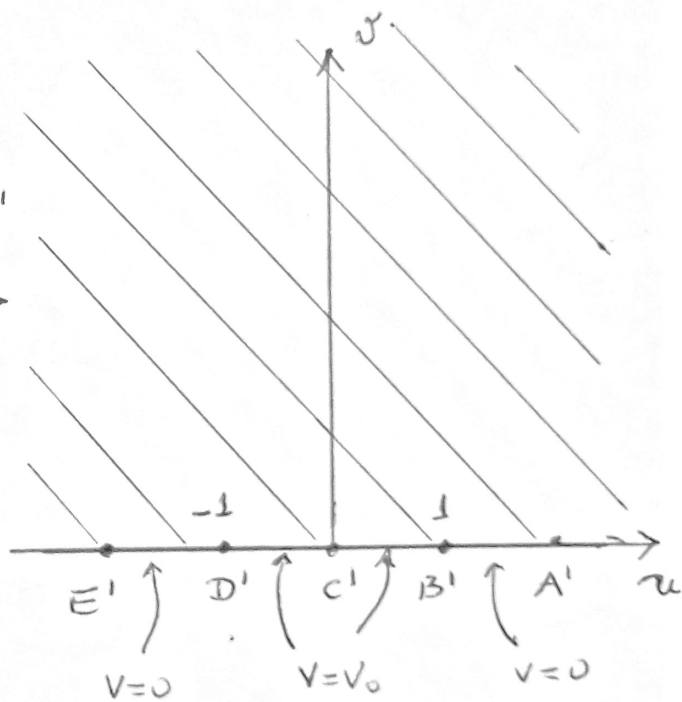


Agora usando a transformação conforme

$$w = \sin z'''$$



$$w = \sin z'''$$



$$\sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ e^{-y} (\cos x + i \sin x) - e^y (\cos x - i \sin x) \right]$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Logo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \frac{1}{2i} \left\{ i e^{-y} + i e^y \right\} = \cosh y$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cosh y$$

A solução no plano  $w$  é dada por (exercício 7 lista 1c)

$$v(u, v) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right)$$

com

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$$

$$V(x''', y''') = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{2 \cos x''' \sinh y'''}{\cos^2 x''' \sinh^2 y''' + \sin^2 x''' \cosh^2 y''' - 1} \right) \quad (12)$$

$$\cos^2 x''' \sinh^2 y''' + \sin^2 x''' \cosh^2 y''' - 1$$

$$= \cos^2 x''' \sinh^2 y''' + (1 - \cos^2 x''') \cosh^2 y''' - 1$$

$$= \cosh^2 y''' - \cos^2 x''' - 1 = \sinh^2 y''' - \cos^2 x'''$$

Portanto, o argumento de  $\operatorname{atan}(\ )$  é igual a

$$\frac{2 \cos x''' \sinh y'''}{\sinh^2 y''' - \cos^2 x'''} = \frac{2 \left( \frac{\cos x'''}{\sinh y'''} \right)}{1 - \left( \frac{\cos x'''}{\sinh y'''} \right)^2} = \operatorname{tg}(2\alpha)$$

com

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos x'''}{\sinh y'''}$$

⇓

$$V(x''', y''') = \frac{V_0}{\pi} \operatorname{atan}(\operatorname{tg}(2\alpha)) = \frac{V_0}{\pi} 2\alpha$$

$$V(x''', y''') = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{\cos x'''}{\sinh y'''} \right)$$

Retornando ao sistema de coordenadas original  
no plano  $x \times y$

(13)

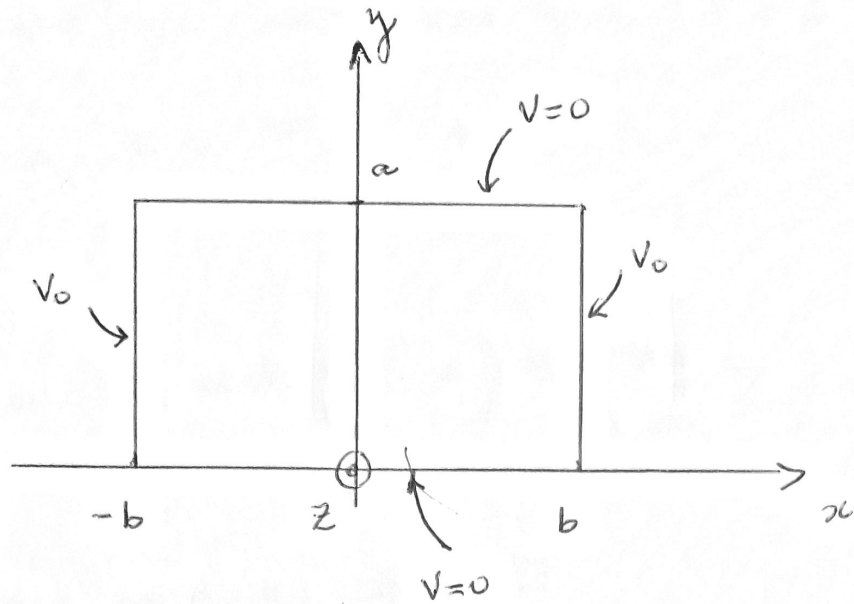
$$v(x, y) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{atan} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a} y\right)}{\sinh(x\pi/a)} \right]$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{a} x} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{a} y\right]$$

onde na última passagem usamos o teorema de unicidade para a eq. de Laplace na região  $\{x \geq 0, 0 \leq y \leq a\}$  para igualar a solução via transformação conforme com a correspondente solução em forma de série via separação de variáveis.

Verifique que a solução via mapeamento conforme satisfaz as condições de contorno do problema.





$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = 0, \quad y = 0 \quad (\text{I}) \\ V = 0, \quad y = a \quad (\text{II}) \\ V = V_0, \quad x = -b \quad (\text{III}) \\ V = V_0, \quad x = b \quad (\text{IV}) \end{array} \right.$$

De acordo com a análise anterior

$$V(x, y) = (A e^{kx} + B e^{-kx}) (C \sin(ky) + D \cos(ky))$$

Por simetria

$$V(-x, y) = V(x, y) \Rightarrow A = B$$

Portanto

$$V(x, y) = \cosh(kx) [C \sin(ky) + D \cos(ky)]$$



De forma análoga, concluímos que (I e II) =

(15)

$$D=0 \text{ e } k = \frac{n\pi}{a}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Logo

$$V_n(x, y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right); \quad n=1, 2, \dots$$

Por fim, das condições III e IV

$$V(\pm b, y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}_{= D_n} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

Do exemplo anterior

$$D_n = C_n \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Então

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

Separação de variáveis

Coordenadas esféricas com simetria azimutal

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Trabalharemos em situações com simetria azimutal

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Procuraremos por soluções do tipo

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

portanto

$$\textcircled{H} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

Dividindo por  $V = R \Theta$ , temos

(17)

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{depende só de } R} + \underbrace{\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}_{\text{depende só de } \Theta} = 0$$

depende só  
de  $R$

depende só de  $\Theta$

Então

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1)$$

onde  $l$  é uma cte.

Portanto

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1) R$$

$$\text{Ansatz: } R(r) = r^\alpha$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \alpha r^{\alpha-1} \right) = l(l+1) r^\alpha$$

$$\alpha \frac{d}{dr} (r^{\alpha+1}) = \alpha(\alpha+1) r^\alpha = l(l+1) r^\alpha \Rightarrow \alpha(\alpha+1) = l(l+1)$$

⇓

$$\alpha = l \quad \text{ou} \quad \alpha = -(l+1)$$

Então a solução mais geral possível para  $R(r)$  é (18)

$$R(r) = A r^l + \frac{B}{r^{l+1}}$$

Além disso

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin\theta \Theta$$

Fazendo uma mudança de variável

$$x = \cos\theta \Rightarrow \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

Então

$$-\cancel{\sin\theta} \frac{d}{dx} \left[ -\sin^2\theta \frac{d\Theta}{dx} \right] = -l(l+1) \cancel{\sin\theta} \Theta$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \underbrace{l(l+1)}_{=\lambda} \Theta = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \lambda \Theta = 0$$

$$(1-x^2) \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \lambda \Theta = 0$$

A eq. diferencial ordinária de segunda ordem

(19)

é do tipo

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Um método geral de resolver a eq. acima é procurar por soluções em forma de série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{s+n}$$

Substituindo essa solução na eq. diferencial conclui-se que 2 valores possíveis para  $s$  ( $= 0, 1$ ) e é possível obter uma relação de recorrência para os coeficientes  $C_n$ .

Entretanto, a série diverge para  $|x|=1$ , ou seja,  $\theta = 0, \pi$ , o que certamente é um comportamento não-físico, já que não há nada de especial com as direções  $\theta = 0, \pi$ .

Esse comportamento singular em  $|x|=1$ , no entanto, pode ser evitado se a série não for infinita, ou seja, terminar para algum valor máximo de  $n$ . Nessa situação, a série deve dar origem a um polinômio.



Essa condição de truncamento da série é obtida exatamente se a constante  $\lambda$  for igual a  $l(l+1)$ , para  $l \in \mathbb{N}$

$$\lambda = l(l+1) \quad l \in \mathbb{N}$$

Os polinômios obtidos dessa forma são conhecidos como polinômios de Legendre e denotados  $P_l(x)$

Os polinômios de Legendre de grau  $l$  podem ser obtidos por meio da fórmula de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Fórmula de Rodrigues

Assim como as funções  $\sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$  vistas anteriormente, os polinômios de Legendre formam uma base ortogonal de funções, de acordo com o seguinte produto escalar

$$\begin{aligned} \langle P_l, P_{l'} \rangle &= \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \int_0^\pi P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \end{aligned}$$

Sendo assim

21

$$\{g_l(x)\} = \left\{ \left(\frac{2l+1}{2}\right)^{1/2} P_l(x); l = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

forma uma base ortonormal de funções no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ , já que

$$\langle g_l, g_{l'} \rangle = \delta_{ll'}$$

Os primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

⋮

$$P_l(x=1) = 1 \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

Perceba que  $P_l(x)$  possui paridade bem definida no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$

$$P_l(x) = P_l(-x) \quad \text{para } l \text{ par}$$

$$P_l(x) = -P_l(-x) \quad \text{para } l \text{ ímpar}$$

A solução geral para o potencial eletrostático em coordenadas esféricas com simetria azimutal, ou seja, quando o potencial não depende de  $\phi$  é

(22)

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$