MAT226 - Equações Diferenciais I

1a. Lista de Exercícios - 08/09/2020

(1) Verifique que as funçoes $y_1(x) = \cos(\ln x)$ e $y_2(x) = \text{sen}(\ln x)$, definidas para $x > 0$, são soluçoes da equaçao $x^2y'' + xy' + y = 0$.

(2) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que $y(x) = \displaystyle\int_0^x \text{sen}(x-t)f(t)\,dt$ é soluçao do problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

(3) Uma pessoa P, começando na origem, move-se no sentido positivo do eixo x, puxando um peso ao longo da curva C, chamada de **tatriz**, conforme mostra a figura 1. O peso, inicialmente localizado sobre o eixo y em $(0, s)$, é puxado por uma corda de comprimento constante s, a qual é mantida esticada durante todo o movimento.Determine uma uma equação diferencial para a trajetória do peso. Suponha que a corda seja sempre tangente a C.

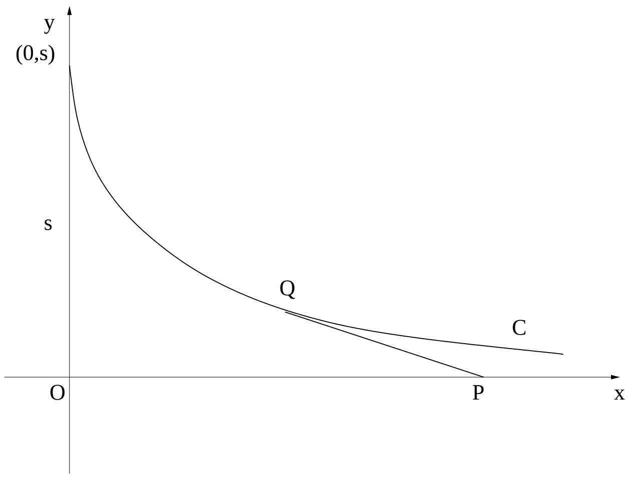

FIGURE 1. Tratriz.

(4) Conforme ilustrado na figura (5), raios de luz atingem uma curva plana C de maneira que todos os raios paralelos ao eixo x sejam refletidos para um único ponto F. Supondo que o ângulo α de incidência seja igual ao ângulo de reflexão, determine uma equação diferencial que descreva o formato da curva C.

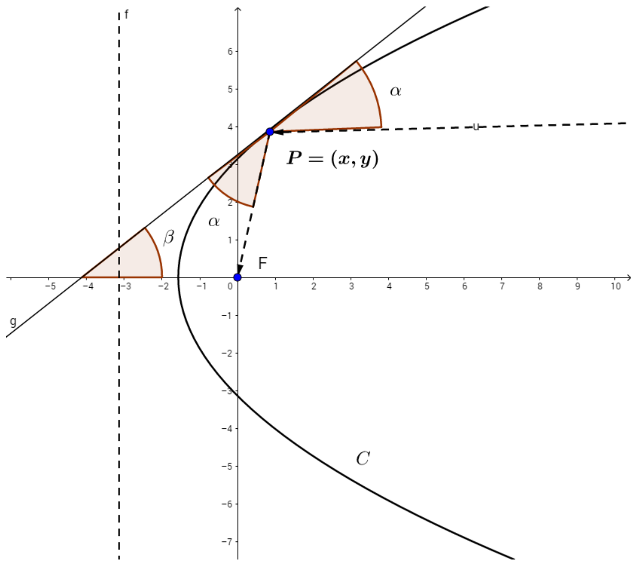

FIGURE 2. Espelho parabólico.

(5) Suponha que água está saindo de um tanque por um buraco circular em sua base de área A_h. Quando a água vaza pelo buraco, o atrito e a contração da corrente de água nas proximidades do buraco reduzem o volume de água que está vazando do tanque por segundo para $cA_h\sqrt{2gh}$, onde c $(0 < c < 1)$ é uma constante empírica. Determine uma equação diferencial para a altura da água h no instante t para um tanque cúbico, como na figura 3. O raio do buraco é de 2 cm.

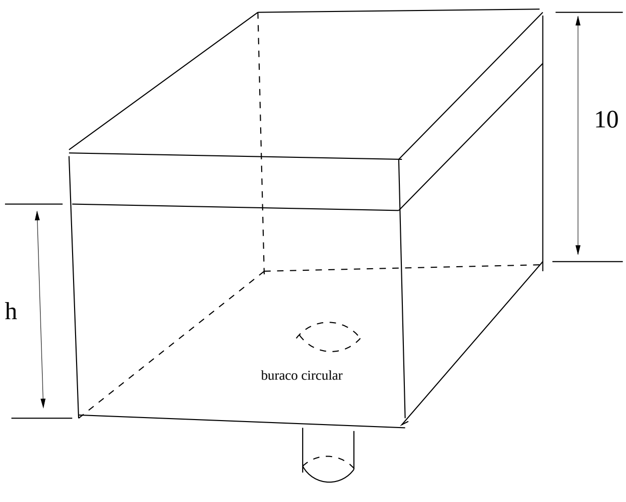

FIGURE 3. Caixa de água.

(6) (Equações escalares autônomas) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Fixado x_0 em (a, b), seja $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)}\, ds$. Mostre que as soluções da equação $\dot{x} = f(x)$ são descritas pelas família $x(t) = \phi(t - c)$, onde ϕ é a função inversa de F e a constante c é determinada pela condição inicial.

(7) (Equações com variáveis separadas) Considere a equação $\dot{x} = f(t)g(x) \equiv F(t, x)$, onde F e $\frac{\partial F}{\partial x}$ são definidas e contínuas no retângulo $R = \{(t, x) : t_1 < t < t_2, a < x < b\}$. Suponha que $g(x) \neq 0$ para $a < x < b$.

Seja $u = \phi(t)$ a solução de $\dot{u} = f(t)$ e $x = \psi(u)$ a solução de $\frac{dx}{du} = g(x)$. Mostre que todas as soluções de $\dot{x} = F(t, x)$ são descritas pela família $x(t) = \psi(\phi(t) - c)$, onde a constante c é determinada pe la condição inicial.

(8) (Equações homogêneas) Se $f(t, x)$ é homogênea de grau 0 (isto é, $f(\alpha t, \alpha x) = f(t, x)$, para todo $\alpha > 0$), mostre que a substituição $x = tu$ transforma a equação $\dot{x} = f(t, x)$ numa do tipo considerada no problema anterior.

(9) Determine todas as soluções das seguintes equações:
- (a) $\dot{x} = te^t$
- (b) $\dot{x} = t \log(t^2 - 1)$
- (c) $\dot{x} = x^2 - 4$
- (d) $\dot{x} = \sec x$
- (e) $\dot{x} = -(t + 1)x/t$
- (f) $\dot{x} = t^3(x + 1)^{-2}$
- (g) $\dot{x} = (x + t)/t$
- (h) $\dot{x} = (x - \sqrt{x^2 + t^2})/t$
- (i) $\dot{x} = \frac{3x^2 - t^2}{2tx}$
- (j) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+y}{y-2x}$
- (k) $(x - \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} = y$
- (l) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x+1}$

(10) Resolva cada um dos problemas de valor inicial
- (a) $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$
- (b) $3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(0) = 1$
- (c) $3xy + y^2 + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(2) = 1$
- (d) $t^2(1 + y^2) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 1$
- (e) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+t^2y}$, $y(2) = 3$
- (f) $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$
- (g) $\frac{dy}{dt} = k(a - y)(b - y)$, $y(0) = 0$ $\quad (k, a, b > 0)$
- (h) $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{t}$, $y(1) = 0$

(11) Determine a constante a de modo que a equação dada seja exata e resolva a equação resultante:
- (a) $x + ye^{2xy} + axe^{2xy}\frac{dy}{dx} = 0$
- (b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(ax+1)}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0.$

(12) Determine todas as funções $f(x)$ tais que a equação diferencial

$$y^2 \operatorname{sen} x + yf(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata. Resolva a equação para essas funções f.

(13) Mostre que se $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/M$ só depende de y, então a equação $M(x, y)+N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ admite um fator integrante que só depende de y. Formule (e prove) uma condição suficiente para que o fator integrante dependa apenas de x.

(14) Determine um fator integrante e resolva:
- (a) $(x^2 + y^2) + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\frac{dy}{dx} = 0$
- (b) $(3y^2 - x^2 + 1) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$
- (c) $(3xy - 4y) + (2x^2 - 4x)\frac{dy}{dx} = 0$
- (d) $(xy^2 + 2) + 3x^2y\frac{dy}{dx} = 0.$

(15) (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^n$$

é denominada uma *equação de Bernoulli*. Aqui, n é uma constante real e f e g são funções contínuas num intervalo (a, b). Mostre que a mudança $z = y^{1-n}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear .

(b) Resolva as seguintes equações:

(i) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

(ii) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$

(iii) $\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p$.

(16) (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2 \quad (*)$$

é denominada uma *equação de Riccati*. Suponha que y_p é uma solução particular de (*). Prove que a mudança $y = y_p + \frac{1}{v}$ transforma (*) na equação linear

$$\frac{dv}{dx} = -\left(f_2(x) + 2f_3(x)y_p(x)\right)v + f_3(x).$$

(b) Ache a solução geral de cada uma das seguintes equações:

(i) $y' = xy^2$

(ii) $y' = \frac{2x+3y}{y-3x}$

(iii) $y' + y = y^2$

(iv) $y' = x^2y + 2$

(v) $y = y + \cos x$

(vi) $y' = \frac{x+1}{y^2+1}$

(vii) $y' = \frac{3xy+2}{x^2+1}$

(viii) $y' = \frac{x^2+2y+1}{3y-2x-1}$

(ix) $y' + xy = xy^3$.

(17) Ache todas as soluçoes, dando seus domínios máximos, das equaçoes:

(a) $y''' = x^2$

(b) $3y' + y = 2e^{-x}$,

(c) $(x + 3y) - xy' = 0$

d (d) $xy' = y$.

(18) (a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' + \frac{2y}{x} = 4x \\ y(1) = y_0 \end{cases}$.

(b) Esboce o gráfico de algumas soluçoes encontradas no item (a).

c Para que valores de y_0 o problema de valor inicial $\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ tem soluçao?

(19) Mostre que os problemas de valor inicial abaixo têm infinitas soluçoes.

(a) $\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}(3x^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

(20) Demonstre diretamente (sem invocar teoremas de existência e unicidade mais gerais) que, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = x|y| \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tem soluçao única. Esboce o gráfico de algumas soluçoes.

(21) (a) Mostre que toda soluçao de $x^2y' + 2xy = 1$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$.

(b) Encontre uma soluçao da equaçao acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.

(22) (a) Mostre que toda soluçao de $x^2y' + 2xy = 0$, com $x > 0$, tende a zero quando $x \to +\infty$.

(b) Encontre uma soluçao da equaçao acima satisfazendo $y(2) = 2y(1)$.