MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Equações diferenciais lineares
Existência e unicidade[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo - SP

[1] R. Brockett.

Equações diferenciais lineares

Aqui consideramos sistemas lineares de **primeira ordem** tais como

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{1}$$

em que

1. $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.
2. $A : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz cujos coeficientes $A_{ij}(t)$ são funções contínuas.
3. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é chamado vetor de **estado** ou simplesmente estado do sistema (1).

- Ao longo da disciplina adotaremos a **notação** do livro de R. Brockett.

$x \in \mathbb{R}^n$ denotará um **vetor coluna**,
ie., uma matriz $n \times 1$.
Já $x' \in \mathbb{R}^n$ representará um vetor **linha**, uma matriz $1 \times n$.

Note que (1) também engloba equações lineares de ordem maior tais como

$$y^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_1(t)y^{(1)}(t) + \alpha_0(t)y^{(0)}(t)$$

onde $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dy^k}$ para $k \geq 0$. Com efeito, se tomamos $x_i = y^{(i-1)}$ obtemos que

$$\begin{array}{rclcl} \dot{x}_1(t) & = & y^{(1)}(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & y^{(2)}(t) & = & x_3(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & y^{(n)}(t) & = & \alpha_{n-1}(t)x_n(t) + ... + \alpha_1(t)x_2(t) + \alpha_0(t)x_1(t) \end{array}$$

e assim

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & ... & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Veja que esta ideia pode ser **estendida** para equações simultâneas.

Oscilador harmônico

Recordamos que a equação do **sistema mecânico** ao lado é

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

onde m é a **massa** do corpo, b o **amortecimento** e k a **constante elástica**. y é a saída e u o controle.

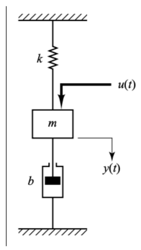

Figura: Massa mola amortecido.

Definindo as variáveis de **estado** $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ obtemos

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}(u - b\dot{y} - ky)$$

que nos dá

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Inicialmente vamos **mostrar** que (1) possui solução única.

Teorema

Seja $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz cujos coeficientes $A_{ij}(t)$ são **contínuos** em $[t_0, t_1]$. Então existe no máximo **uma** solução para $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ definida para todo $t \in [t_0, t_1]$ satisfazendo $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Proof. Sejam x_1 e x_2 soluções da equação. Por **linearidade**

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

também satisfaz a equação mas com **condição** inicial $z(t_0) = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\|z(t)\|^2\right) &= 2\dot{z}(t) \cdot z(t) \\
&= 2(A(t)z(t)) \cdot z(t) \\
&= \sum_i \sum_j 2A_{ij}(t) z_j(t) z_i(t) \\
&\leq 2n^2 \|z(t)\|^2 \max_{ij} |A_{ij}(t)|.
\end{aligned}$$

Daí, se $\eta(t) = 2n^2 \max_{ij} |A_{ij}(t)|$ temos que

$$\frac{d}{dt}\left(\|z(t)\|^2\right) - \eta(t)\|z(t)\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Logo, se tomamos o fator **integrante** $\rho(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds}$ obtemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\rho(t)\|z(t)\|^2\right) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

que implica, pela **integração** da desigualdade em $[t_0, t]$ que

$$\rho(t)\|z(t)\|^2 - \rho(t_0)\|z(t_0)\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Como $z(t_0) = 0$ e $\rho(t) > 0$ em $[t_0, t_1]$ concluímos que

$$\|z(t)\|^2 \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \Rightarrow \quad \|z(t)\| = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Portanto $x_1(t) = x_2(t)$ em $[t_0, t_1]$.

$\square$

Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a **base** canônica[2] de $\mathbb{R}^n$ e **suponha** a existência de soluções

$$\Phi_1(t, t_0), ..., \Phi_n(t, t_0)$$

para a equação $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sujeita ao valor **inicial** $x(t_0) = e_i$ com $1 \leq i \leq n$.

Logo, **se** $x_0 = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, então

$$x(t) = \alpha_1 \Phi_1(t, t_0) + ... + \alpha_n \Phi_n(t, t_0)$$

satisfaz

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0$$

garantindo a existência de solução para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Desta forma, é suficiente provamos a existência das soluções $\Phi_i(t, t_0)$ para $1 \leq i \leq n$.

[2] $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ com 1 na i-ésima posição $1 \leq i \leq n$.

Note ainda que se tais funções **existem** e definimos a matriz

$$\Phi(t, t_0) = [\Phi_1(t, t_0)\ \Phi_2(t, t_0)\ \ \ldots\ \ \Phi_n(t, t_0)]$$

então

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = [A(t)\Phi_1(t, t_0)\ A(t)\Phi_2(t, t_0)\ \ \ldots\ \ A(t)\Phi_n(t, t_0)] = A(t)\Phi(t, t_0)$$

com $\Phi(t_0, t_0) = [e_1 \ldots e_n] = I$. **Desta** forma temos que a função vetorial

$$t \in [t_0, t_1] \mapsto \Phi(t, t_0)x_0 \in \mathbb{R}^n$$

resolve o problema de valor inicial $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ com $x(t_0) = x_0$.

Assim **garantimos** a existência de solução para o problema (1) provando a **existência** da função matricial $\Phi(t, t_0)$ para $t \in [t_0, t_1]$ com condição **inicial** $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Permita-nos recordar:

i) Dizemos que uma **sequencia** de funções escalares $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ definidas em $[t_0, t_1]$ **converge**, se existe $x(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t) \quad \forall t.$$

ii) Dizemos que $\{x_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge **uniformemente** se existe uma função $x(t)$ tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N(\epsilon)$

$$\sup_{t\in[t_0,t_1]} |x_k(t) - x(t)| < \epsilon.$$

iii) Uma série de funções $x_1(t) + x_2(t) + ... + x_k(t) + ...$ converge se sua sequencia de somas **parciais** $s_k(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i(t)$ converge para cada t. Se s_k converge uniformemente, dizemos que a serie **converge** uniformemente. Quando $\sum_{k\geq 1} |x_k(t)|$ converge, dizemos que $\sum_{k\geq 1} x_k(t)$ converge **absolutamente**.

iv) Uma sequencia de **matrizes** $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge se as sequencias de **funções** formadas por seus elementos $\{(M_k)_{ij}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergem. **Analogamente** se define convergência uniforme de **funções** matriciais, bem como convergência de série de matrizes, convergência uniforme e absoluta.

Teorema

Seja $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com coeficientes **contínuos** em $[t_0, t_1]$ e considere a seguinte sequencia de **funções matriciais** $\{M_k\}_{k\geq 0}$ definidas recursivamente por

$$M_k(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)M_{k-1}(s)ds \quad \text{com} \quad M_0 = I.$$

Então

- $\{M_k\}_{k\geq 0}$ **converge** uniformemente.
- Se $\Phi = \lim_{k\to\infty} M_k$, então $\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$ com $\Phi(t_0,t_0) = I$.
- Em **particular**, $x(t) = \Phi(t,t_0)x_0$ é solução de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{em } [t_0, t_1]$$

  com valor inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

⋆ Na prova do teorema usamos o **M-teste** de Weierstrass. Link

⋆ A função matricial $\Phi(t,t_0)$ é chamada **matriz de transição** do sistema (1).

⋆ $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma **aproximação** sucessiva para $\Phi(t,t_0)$.

Prova. **Inicialmente** observe que

$$
\begin{aligned}
M_k(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1) M_{k-1}(s_1) ds_1 \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1) \left(I + \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) M_{k-2}(s_2) ds_2 \right) ds_1 \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1) ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \left(I + \int_{t_0}^{s_2} A(s_3) M_{k-3}(s_3) ds_3 \right) ds_2 ds_1 \\
&\;\vdots \\
&= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1) ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) ds_2 ds_1 + \ldots \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \ldots \int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k) ds_k \ldots ds_2 ds_1
\end{aligned}
$$

que nos dá

$$
M_k(t) - M_{k-1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \ldots \int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k) ds_k \ldots ds_2 ds_1 .
$$

Seja $\eta(t) = \max_{ij} |A_{ij}(t)|$. Como $|\,(AB)_{ij}\,| \leq n \max_{ij} |A_{ij}| \max_{ij} |B_{ij}|$ temos que

$$
\begin{aligned}
|(M_k - M_{k-1})_{ij}(t)| &= \left| \left(\int_{t_0}^{t} A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} A(s_2) \ldots \int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k) ds_k \ldots ds_2 ds_1 \right)_{ij} \right| \\
&\leq n^{k-1} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{k-1}} \max_{ij} |A_{ij}(s_1)| \max_{ij} |A_{ij}(s_2)| \ldots \max_{ij} |A_{ij}(s_k)| ds_k \ldots ds_2 ds_1 \\
&\leq n^{k-1} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_1)\eta(s_2)\ldots\eta(s_k) ds_k \ldots ds_2 ds_1.
\end{aligned}
$$

Seja agora $\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \eta(s) ds$ e observe que integrando por **partes** temos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{s_{k-2}} \int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_{k-1})\eta(s_k) ds_k ds_{k-1} &= \int_{t_0}^{s_{k-2}} \eta(s_{k-1})\gamma(s_{k-1}) ds_{k-1} \\
&= \gamma^2(s_{k-1}) \Big|_{t_0}^{s_{k-2}} - \int_{t_0}^{s_{k-2}} \eta(s_{k-1})\gamma(s_{k-1}) ds_{k-1}
\end{aligned}
$$

que implica

$$
\int_{t_0}^{s_{k-2}} \int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_{k-1})\eta(s_k) ds_k ds_{k-1} = \frac{\gamma^2(s_{k-2})}{2}.
$$

Logo

$$\int_{t_0}^{s_{k-3}}\int_{t_0}^{s_{k-2}}\int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_{k-2})\eta(s_{k-1})\eta(s_k)ds_k ds_{k-1} ds_{k-2} = \int_{t_0}^{s_{k-3}} \eta(s_{k-2})\frac{\gamma^2(s_{k-2})}{2}ds_{k-2}$$

$$= \frac{\gamma^3(s_{k-2})}{2}\Big|_{t_0}^{s_{k-3}} - 2\int_{t_0}^{s_{k-3}} \frac{\gamma^2(s_{k-2})}{2}\eta(s_{k-2})ds_{k-2}$$

que nos **dá**

$$\int_{t_0}^{s_{k-3}} \eta(s_{k-2})\frac{\gamma^2(s_{k-2})}{2}ds_{k-2} = \frac{\gamma^3(s_{k-3})}{3.2}.$$

Então

$$\int_{t_0}^{s_{k-3}}\int_{t_0}^{s_{k-2}}\int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_{k-2})\eta(s_{k-1})\eta(s_k)ds_k ds_{k-1} ds_{k-2} = \frac{\gamma^3(s_{k-3})}{3.2}.$$

Desta forma **obtêm-se** que

$$|(M_k - M_{k-1})_{ij}(t)| \leq n^{k-1}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\dots\int_{t_0}^{s_{k-1}} \eta(s_1)\eta(s_2)\dots\eta(s_k)ds_k\dots ds_2 ds_1 = n^{k-1}\frac{\gamma^k(t)}{k!}.$$

Assim temos que cada termo na série

$$(M_k)_{ij} = (M_0)_{ij} + \sum_{l=1}^{k} (M_l - M_{l-1})_{ij}$$

é menor que seu **termo** correspondente da série

$$\begin{aligned} 1 + \gamma(t) + n\frac{\gamma^2(t)}{2} + n^2\frac{\gamma^3(t)}{3!} + \ldots &= 1 + \gamma(t) + \frac{1}{n}\left(\frac{(n\gamma(t))^2}{2} + \frac{(n\gamma(t))^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= 1 + \gamma(t) + \frac{1}{n}\left(e^{n\gamma(t)} - 1 - n\gamma(t)\right) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{e^{n\gamma(t)}}{n}. \end{aligned}$$

Como $\gamma(t)$ é uma função **limitada** em $[t_0, t_1]$, obtemos do M-teste de Weierstrass que a sequencia $\{M_k\}_k$ converge uniformemente para um **limite** Φ dado por[3]

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \ldots \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2ds_1 + \ldots \end{aligned}$$

[3] Esta série é chamada de *Peano-Baker*.

Pela convergência uniforme podemos **derivar** a série Φ termos a termos obtendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) &= \frac{d}{dt}\Bigg(I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \ldots \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2ds_1 + \ldots\Bigg) \\
&= A(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} A(s_2)ds_2 + \ldots \\
&\qquad + A(t)\int_{t_0}^{t} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2 + \ldots \\
&= A(t)\left(I + \int_{t_0}^{t} A(s_2)ds_2ds_1 + \ldots + \int_{t_0}^{t} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2 + \ldots\right) \\
&= A(t)\Phi(t,t_0).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)x_0] = \frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]x_0 = A(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

com $\Phi(t_0,t_0)x_0 = x_0$ que garante a existência de soluções para

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{com condição inicial } x(t_0) = x_0.$$

□

Corolário

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é constante temos que

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) &= I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + ... + \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!} + ... \\ &= e^{A(t-t_0)}.\end{aligned}$$

Prova. Basta calcular a série de Peano-Baker com a hipótese A constante.

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s_1)ds_1 + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \ldots \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} A(s_k)ds_k\ldots ds_2ds_1 + \ldots \\
&= I + A\int_{t_0}^{t} ds_1 + A^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1} ds_2ds_1 + \ldots \\
&\quad + A^k\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_1}\ldots\int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k\ldots ds_2ds_1 + \ldots \\
&= I + A(t-t_0) + A^2\int_{t_0}^{t}(s_1-t_0)ds_1 + \ldots \\
&\quad + \frac{A^k}{(k-1)!}\int_{t_0}^{t}(s_1-t_0)^{k-1}ds_1 + \ldots
\end{aligned}$$

o que nos dá o resultado desejado. □

1. Integração por partes

Prove que se f e g são funções com **derivada** contínua em $[a,b]$, então vale a fórmula

$$\int_a^b f(x)\,\dot{g}(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\dot{f}(x)\,dx$$

onde $h(x)\Big|_a^b = h(b) - h(a)$.[a]

[a] Integre a fórmula de derivação do produto.

2. Uma partícula em movimento

Uma partícula se move em linha **reta** com velocidade $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Quão longe ela **viajará** durante os t segundos iniciais?

3. Não unicidade

Encontre **duas** soluções diferentes para a equação não linear

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)} \quad \text{com condição } \textbf{inicial} \quad x(0) = 0.$$

4. Produto de matrizes

i) Sejam A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. **Verifique** que[a]

$$|(AB)_{ij}| \leq n \max_{ij} |A_{ij}| \, \max_{ij} |B_{ij}| \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

ii) O **traço** de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definido como a **soma** dos elementos de sua diagonal $\mathrm{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$. Mostre que:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \quad \forall A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

[a] Use a definição de produto de matrizes.

5. Convergência uniforme

Use o **M**-Teste de Weierstrass enunciado abaixo e em Link para mostrar que as séries de funções a seguir convergem **uniformemente**.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

6. **M**-Teste de Weierstrass

Seja $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma **sequencia** de funções reais definidas em $I \subset \mathbb{R}$.

i) Mostre que a série de funções $\sum_k f_k(x)$ converge **uniformemente**, se só se, dado $\epsilon > 0$, **existe** $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \epsilon \quad \forall x \in I \quad \text{e} \quad n,\, m \geq N(\epsilon).$$

ii) Suponha que $|f_k(x)| \leq M_k$ $\forall x \in I$ e que $\sum_k M_k < \infty$. Prove que $\sum_k f_k(x)$ **converge** uniformemente e absolutamente.