

SME0212/SME5720 – Otimização Não-Linear

Apresentação da disciplina

Definição de otimização não-linear sem restrições

Elias S. Helou Neto

Apresentação da Disciplina

Contato e ambiente virtual

- ▶ Professor: Elias Salomão Helou Neto
email: elias@icmc.usp.br
- ▶ Site da disciplina:
<https://edisciplinas.usp.br>
- ▶ Bibliografia: notas de aula e *Bertsekas, Nonlinear Programming*

Apresentação da Disciplina

Avaliação

- ▶ Projetos (dois, com dificuldade extra para alunos da pós)
- ▶ Provas teóricas (duas, para entregar em pdf)
- ▶ Todas atividades de avaliação com pesos iguais

Apresentação da Disciplina

Ementa: otimização irrestrita

- ▶ Definição
- ▶ Exemplos
- ▶ Condição necessária de otimalidade
- ▶ Algoritmos de busca direcional
 - ▶ definição de direção de descida
 - ▶ direção de máxima descida
 - ▶ máxima descida com passo fixo
 - ▶ máxima descida com busca linear exata
 - ▶ máxima descida com busca linear de Armijo
 - ▶ direção de Newton
 - ▶ busca linear não monótona
 - ▶ Grippo, Lampariello e Lucidi
 - ▶ Zhang e Hager
- ▶ Algoritmo e direção de Gradientes Conjugados
- ▶ Algoritmo e direção BFGS

Apresentação da Disciplina

Ementa: otimização restrita

- ▶ Definição
- ▶ Exemplos
- ▶ Condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker
- ▶ Algoritmos de pontos interiores
- ▶ Algoritmos de penalização e de Lagrangeano aumentado

Apresentação da Disciplina

Ementa: tópicos adicionais

- ▶ Convexidade e otimização convexa
- ▶ Subgradientes
- ▶ Algoritmos incrementais para problemas grandes
- ▶ Aplicações em reconstrução tomográfica de imagens
- ▶ Algoritmos acelerados do tipo Nesterov
- ▶ Aberto a sugestões

Otimização Não-Linear

Definição

Denotamos o problema de minimização irrestrita por

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Otimização Não-Linear

Definição

Denotamos o problema de minimização irrestrita por

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. A função f é denominada **função objetivo**.

Otimização Não-Linear

Definição

Denotamos o problema de minimização irrestrita por

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. A função f é denominada **função objetivo**.

Para nossos algoritmos, f precisa ter derivada contínua (às vezes mais que isso)

Otimização Não-Linear

Minimizador global

Dizemos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador global de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quando

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = (x - a)^2$. Prove que $x^* = a$ é o único minimizador global de f .

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = (x - a)^2$. Prove que $x^* = a$ é o único minimizador global de f .

Veja que $f(x^*) = (x^* - a)^2 = (a - a)^2 = 0$.

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = (x - a)^2$. Prove que $x^* = a$ é o único minimizador global de f .

Veja que $f(x^*) = (x^* - a)^2 = (a - a)^2 = 0$. Por outro lado, se $x \neq a$, temos $f(x) = (x - a)^2 > 0$. Logo, $f(x^*) = 0 \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = \cos(x) - x/2$. Prove que f não possui minimizador global.

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = \cos(x) - x/2$. Prove que f não possui minimizador global.

Seja um $x \in \mathbb{R}$ qualquer, então

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - \frac{x + 2\pi}{2} = \cos(x) - \frac{x}{2} - \pi = f(x) - \pi.$$

Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ fixo e $f(\mu, \sigma) = -\prod_{i=1}^n (e^{-(s_i - \mu)^2 / (2\sigma^2)})$. Encontre evidências numéricas que o minimizador (μ^*, σ^*) é tal que μ^* é a média

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i.$$

Otimização Não-Linear

Minimizador local

Dizemos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é um minimizador local de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quando existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \text{ t.q. } \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| \leq \epsilon.$$

Otimização Não-Linear

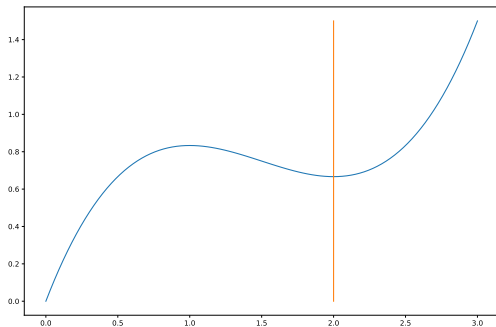
Exemplos

Seja $f(x) = x^3/2 - 3/2x^2 + 2x$.

Otimização Não-Linear

Exemplos

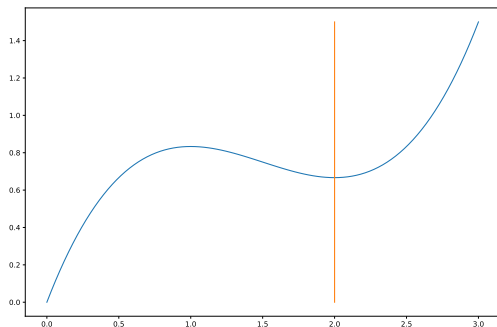
Seja $f(x) = x^3/2 - 3/2x^2 + 2x$. O gráfico a seguir nos dá fortes evidências que $x^* = 2$ é minimizador local dessa função.



Otimização Não-Linear

Exemplos

Seja $f(x) = x^3/2 - 3/2x^2 + 2x$. O gráfico a seguir nos dá fortes evidências que $x^* = 2$ é minimizador local dessa função.



Veremos como demonstrar esse fato rigorosamente de forma simples posteriormente.

Exercícios

- ▶ Defina apropriadamente maximizador global e maximizador local
- ▶ A função de Rosenbrock é dada por:

$$f(\mathbf{x}) = (a - x_1)^2 + b(x_2 - x_1^2)^2.$$

Encontre o seu minimizador global. Explique.

- ▶ Como um método para minimizar uma função pode ser utilizado para maximização?
- ▶ Dê um exemplo de função que não possua minimizadores nem maximizadores