Estatística de Redes Sociais

Antonio Galves

Módulo 1

3a. aula

Unanimidade, robôs, grafos aleatórios.

Recapitulando: modelo do votante

Recapitulando: modelo do votante

1. Escolha arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$

Recapitulando: modelo do votante

1. Escolha arbitrariamente a lista inicial de opiniões
   $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:

Recapitulando: modelo do votante

1. Escolha arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$

Recapitulando: modelo do votante

1. Escolha arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   - 2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   - 2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina

$$O_n = X_{n-1}(I_n)$$

Recapitulando: modelo do votante

1. Escolha arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie A_n independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina
   $$O_n = X_{n-1}(I_n)$$
   2.3 Para todo $a \in \mathcal{A}$, defina $X_n(a) = O_n$, se $a = A_n$ e $X_n(a) = X_{n-1}(a)$, se $a \neq A_n$.

Explicando em palavras

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;
- Para decidir que opinião emitir, o ator A_n sorteia uniformemente um de seus influenciadores, isto é, um ator em $\mathcal{V}_{\cdot \to A_n}$, e simplesmente reproduz a última opinião que este influenciador sorteado emitiu até o instante $n-1$.

Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos X_n da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator A_n que vai emitir uma opinião no instante n. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;
- Para decidir que opinião emitir, o ator A_n sorteia uniformemente um de seus influenciadores, isto é, um ator em $\mathcal{V}_{\cdot \to A_n}$, e simplesmente reproduz a última opinião que este influenciador sorteado emitiu até o instante $n-1$.
- As últimas opiniões emitidas por todos os atores diferentes de A_n se mantêm.

Exemplos

Exemplos

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;

Exemplos

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$, com a convenção $N+1=1$.

Exemplos

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$, com a convenção $N + 1 = 1$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) : \, a_1 = 1, \ldots, N \, , a_2 = 1, \ldots, N\}$, o conjunto de atores da rede;

Exemplos

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a - 1, a + 1\}$, com a convenção $N + 1 = 1$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) : a_1 = 1, \ldots, N\,, a_2 = 1, \ldots, N\}$, o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{V}_{\cdot \to (a_1, a_2)} = \{(a_1 + 1, a_2), (a_1 - 1, a_2), (a_1, a_2 + 1), (a_1, a_2 - 1)\}\,,$$

também com a convenção $N + 1 = 1$.

A formação da unanimidade

A formação da unanimidade

- Nos dois exemplos considerados, observamos que a lista de opiniões sempre convergia para a unanimidade.

A formação da unanimidade

- Nos dois exemplos considerados, observamos que a lista de opiniões sempre convergia para a unanimidade.
- Mais precisamente, se no instante inicial cada ator escolhia a opinião $+1$ ou -1, com probabilidade α, e $1 - \alpha$, respectivamente, independentemente dos demais atores, onde $\alpha \in [0, 1]$,

A formação da unanimidade

- Nos dois exemplos considerados, observamos que a lista de opiniões sempre convergia para a unanimidade.
- Mais precisamente, se no instante inicial cada ator escolhia a opinião $+1$ ou -1, com probabilidade α, e $1-\alpha$, respectivamente, independentemente dos demais atores, onde $\alpha \in [0,1]$,
- a partir de um certo instante n, as opiniões $(X_n(a) : a \in A)$ serão TODAS iguais a $+1$ ou -1, com probabilidade α e $1-\alpha$, respectivamente.

A ação de um robô

A ação de um robô

- Um robô destrói a última propriedade:
  "As opiniões $(X_n(a) : a \in A)$ *serão TODAS iguais a* $+1$ *ou* -1*, com probabilidade* α *e* $1 - \alpha$*, respectivamente, onde* α *é a proporção incial de atores com opinião* $+1$*."*

A ação de um robô

- Um robô destrói a última propriedade:
  "As opiniões $(X_n(a) : a \in A)$ *serão TODAS iguais a* $+1$ *ou* -1*, com probabilidade* α *e* $1 - \alpha$*, respectivamente, onde* α *é a proporção incial de atores com opinião* $+1$*."*
- O robô empurra inexoravelmente toda a população para a sua opinião fixa.

Como explicar essa unanimidade?!

Como explicar essa unanimidade?!

- Esse fato pode ser rigorosamente demonstrado, voltando atrás no tempo, em busca da origem da última opinião até o instante n de cada um dos atores.

Como explicar essa unanimidade?!

- Esse fato pode ser rigorosamente demonstrado, voltando atrás no tempo, em busca da origem da última opinião até o instante n de cada um dos atores.
- Ao fazer isso, constatamos que para n grande, as opiniões de TODOS os atores tem a mesma origem.

Como explicar essa unanimidade?!

- Esse fato pode ser rigorosamente demonstrado, voltando atrás no tempo, em busca da origem da última opinião até o instante n de cada um dos atores.
- Ao fazer isso, constatamos que para n grande, as opiniões de TODOS os atores tem a mesma origem.
- Isso explica tanto a unanimidade, quanto a probabilidade α e $1 - \alpha$, respectivamente, dessa opinião unânime ser $+1$ ou -1.

Como explicar essa unanimidade?!

- Esse fato pode ser rigorosamente demonstrado, voltando atrás no tempo, em busca da origem da última opinião até o instante n de cada um dos atores.
- Ao fazer isso, constatamos que para n grande, as opiniões de TODOS os atores tem a mesma origem.
- Isso explica tanto a unanimidade, quanto a probabilidade α e $1-\alpha$, respectivamente, dessa opinião unânime ser $+1$ ou -1.
- No entanto, essa unanimidade depende de uma condição satisfeita nos dois exemplos:

Como explicar essa unanimidade?!

- Esse fato pode ser rigorosamente demonstrado, voltando atrás no tempo, em busca da origem da última opinião até o instante n de cada um dos atores.
- Ao fazer isso, constatamos que para n grande, as opiniões de TODOS os atores tem a mesma origem.
- Isso explica tanto a unanimidade, quanto a probabilidade α e $1-\alpha$, respectivamente, dessa opinião unânime ser $+1$ ou -1.
- No entanto, essa unanimidade depende de uma condição satisfeita nos dois exemplos:
- o grafo descrevendo as relações de influência entre atores é conectado!

Grafos

Grafos

- Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$,

Grafos

- Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$,
- tendo como primeiro elemento um conjunto finito de vértices

Grafos

- Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$,
- tendo como primeiro elemento um conjunto finito de vértices
- e tendo como segundo elemento um conjunto de arestas ligando pares (não orientados) de vértices.

Grafos dirigidos

Grafos dirigidos

- Um **grafo** $G = (V, E)$ é dirigido, se cada aresta tem uma direção.

Grafos dirigidos

- Um **grafo** $G = (V, E)$ é dirigido, se cada aresta tem uma direção.
- Ou seja, um grafo dirigido é um par formado por um conjunto de vértices e por um conjunto de flechas.

O grafo dirigido em nosso modelo básico de rede social

O grafo dirigido em nosso modelo básico de rede social

- O conjunto de vértices é o conjunto de atores;

O grafo dirigido em nosso modelo básico de rede social

- O conjunto de vértices é o conjunto de atores;
- e o conjunto de flechas indo de um ator a outro é deduzido do conjunto de influenciadores:

O grafo dirigido em nosso modelo básico de rede social

- O conjunto de vértices é o conjunto de atores;
- e o conjunto de flechas indo de um ator a outro é deduzido do conjunto de influenciadores:
- dado um par de atores a, b, existe uma flecha indo de a para b, se a pertencer ao conjunto de influenciadores de b.

O grafo dirigido em nosso modelo básico de rede social

- O conjunto de vértices é o conjunto de atores;
- e o conjunto de flechas indo de um ator a outro é deduzido do conjunto de influenciadores:
- dado um par de atores a, b, existe uma flecha indo de a para b, se a pertencer ao conjunto de influenciadores de b.
- Ou seja, (a, b) é uma flecha do grafo dirigido, se $a \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$.

QUIZ

QUIZ

- Dê exemplos de situações sociais, ou de estruturas culturais ou científicas que podem ser descritas naturalmente por grafos não dirigidos.

QUIZ

- Dê exemplos de situações sociais, ou de estruturas culturais ou científicas que podem ser descritas naturalmente por grafos não dirigidos.
- Dê exemplos de situações sociais ou estruturas culturais ou científicas que podem ser descritas naturalmente por grafos dirigidos, mas não por grafos não dirigidos.

Uma rede social que não atinge sempre a unanimidade

Uma rede social que não atinge sempre a unanimidade

- Modelo do votante, com conjunto de atores $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e com conjuntos de influenciadores

$$\mathcal{V}_{\cdot\to 1} = \{2\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 2} = \{1\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 3} = \{4\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 4} = \{3\}\,.$$

Uma rede social que não atinge sempre a unanimidade

- Modelo do votante, com conjunto de atores $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e com conjuntos de influenciadores

$$\mathcal{V}_{\cdot\to 1} = \{2\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 2} = \{1\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 3} = \{4\}, \mathcal{V}_{\cdot\to 4} = \{3\}\,.$$

- Vamos supor que a lista inicial de opinões seja

$$X_0(1) = +1, X_0(2) = -1, X_0(3) = +1, X_0(4) = -1\,.$$

- Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{X_n(1) = X_n(2)\}, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{X_n(3) = X_n(4)\},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{X_n(1) = X_n(3)\}.$$

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.
- Os atores no subconjunto $\{1, 2\}$ só interagem entre si e não interagem com os atores do subconjunto $\{3, 4\}$.

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.
- Os atores no subconjunto $\{1, 2\}$ só interagem entre si e não interagem com os atores do subconjunto $\{3, 4\}$.
- Essa desconexão não ocorria nos exemplos 1 e 2.

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.
- Os atores no subconjunto $\{1, 2\}$ só interagem entre si e não interagem com os atores do subconjunto $\{3, 4\}$.
- Essa desconexão não ocorria nos exemplos 1 e 2.
- Isso sugere a seguinte definição. Um grafo é conectado se dados dois vértices a e b quaisquer, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de vértices $v_0, \ldots, v_k$, tais que

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.
- Os atores no subconjunto $\{1, 2\}$ só interagem entre si e não interagem com os atores do subconjunto $\{3, 4\}$.
- Essa desconexão não ocorria nos exemplos 1 e 2.
- Isso sugere a seguinte definição. Um grafo é conectado se dados dois vértices a e b quaisquer, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de vértices $v_0, \ldots, v_k$, tais que
  1. $v_0 = a$ e $v_k = b$;

Por que essa rede não atinge sempre a unanimidade?

- A resposta é óbvia: há dois conjuntos desconectados em A.
- Os atores no subconjunto $\{1, 2\}$ só interagem entre si e não interagem com os atores do subconjunto $\{3, 4\}$.
- Essa desconexão não ocorria nos exemplos 1 e 2.
- Isso sugere a seguinte definição. Um grafo é conectado se dados dois vértices a e b quaisquer, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de vértices $v_0, \ldots, v_k$, tais que
  1. $v_0 = a$ e $v_k = b$;
  2. há arestas entre v_j e v_{j+1}, para todo $j = 0, \ldots, k - 1$.

Redes sociais conectadas

Redes sociais conectadas

- No nosso modelo básico de rede social, isso se traduz da seguinte maneira.

Redes sociais conectadas

- No nosso modelo básico de rede social, isso se traduz da seguinte maneira.
- Dados dois atores a e b, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de atores $v_0, \ldots, v_k$, tais que

Redes sociais conectadas

- No nosso modelo básico de rede social, isso se traduz da seguinte maneira.
- Dados dois atores a e b, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de atores $v_0, \ldots, v_k$, tais que
  1. $v_0 = a$ e $v_k = b$;

Redes sociais conectadas

- No nosso modelo básico de rede social, isso se traduz da seguinte maneira.
- Dados dois atores a e b, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de atores $v_0, \ldots, v_k$, tais que
  1. $v_0 = a$ e $v_k = b$;
  2. $v_j \in \mathcal{V}_{\cdot \to v_{j+1}}$, para todo $j = 0, \ldots, k-1$,

Redes sociais conectadas

- No nosso modelo básico de rede social, isso se traduz da seguinte maneira.
- Dados dois atores a e b, existe um número inteiro $k \geq 1$, e uma sequência de atores $v_0, \ldots, v_k$, tais que
  1. $v_0 = a$ e $v_k = b$;
  2. $v_j \in \mathcal{V}_{\cdot \to v_{j+1}}$, para todo $j = 0, \ldots, k-1$,
  3. Ou seja, cada v_j é um influenciador de v_{j+1}.

A vida é mais complicada

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:
- quem quiser construir unanimidade em redes, deve ter cuidado para não trabalhar com relações que produzam grafos desconectados.

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:
- quem quiser construir unanimidade em redes, deve ter cuidado para não trabalhar com relações que produzam grafos desconectados.
- No entanto, na vida real as redes de relacionamento são quase que inevitavelmente aleatórias.

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:
- quem quiser construir unanimidade em redes, deve ter cuidado para não trabalhar com relações que produzam grafos desconectados.
- No entanto, na vida real as redes de relacionamento são quase que inevitavelmente aleatórias.
- Isso quer dizer que relações de amizade, ou de influência entre atores se constituem em parte por obra do acaso.

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:
- quem quiser construir unanimidade em redes, deve ter cuidado para não trabalhar com relações que produzam grafos desconectados.
- No entanto, na vida real as redes de relacionamento são quase que inevitavelmente aleatórias.
- Isso quer dizer que relações de amizade, ou de influência entre atores se constituem em parte por obra do acaso.
- Isso nos conduz à seguinte pergunta:

A vida é mais complicada

- A conclusão do que acabamos de ver é:
- quem quiser construir unanimidade em redes, deve ter cuidado para não trabalhar com relações que produzam grafos desconectados.
- No entanto, na vida real as redes de relacionamento são quase que inevitavelmente aleatórias.
- Isso quer dizer que relações de amizade, ou de influência entre atores se constituem em parte por obra do acaso.
- Isso nos conduz à seguinte pergunta:
- Como garantir que a grande maioria dos atores de uma rede construida aleatoriamente esteja conectada?

O grafo de Erdős-Rényi

O grafo de Erdős-Rényi

- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.

O grafo de Erdős-Rényi

- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.
- Vamos considerar o primeiro deles: o grafo aleatório de Erdős-Rényi.

O grafo de Erdős-Rényi

- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.
- Vamos considerar o primeiro deles: o grafo aleatório de Erdős-Rényi.
- O conjunto de vértices é $V = \{1, \ldots, N\}$.

O grafo de Erdős-Rényi

- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.
- Vamos considerar o primeiro deles: o grafo aleatório de Erdős-Rényi.
- O conjunto de vértices é $V = \{1, \ldots, N\}$.
- Entre dois vértices a e b, $a \neq b$ quaisquer, colocamos uma aresta com probabilidade p_N. Essa decisão é tomada independentemente para cada par de vértices.

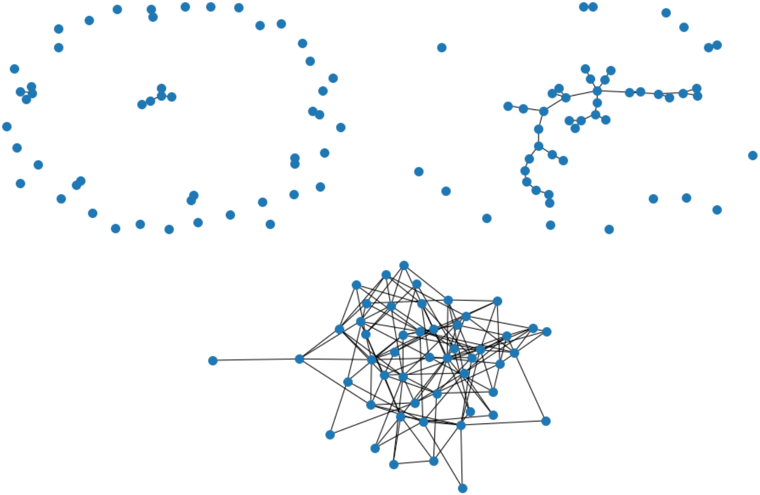
O grafo de Erdős-Rényi

- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.
- Vamos considerar o primeiro deles: o grafo aleatório de Erdős-Rényi.
- O conjunto de vértices é $V = \{1, \ldots, N\}$.
- Entre dois vértices a e b, $a \neq b$ quaisquer, colocamos uma aresta com probabilidade p_N. Essa decisão é tomada independentemente para cada par de vértices.
- Esse grafo tem uma propriedade maravilhosa. Existe um valor crítico $p^\star$, tal que se $p_N > p^\star$, então com grande probabilidade a grande maioria dos vértices estão conectados entre si.

O grafo de Erdős-Rényi

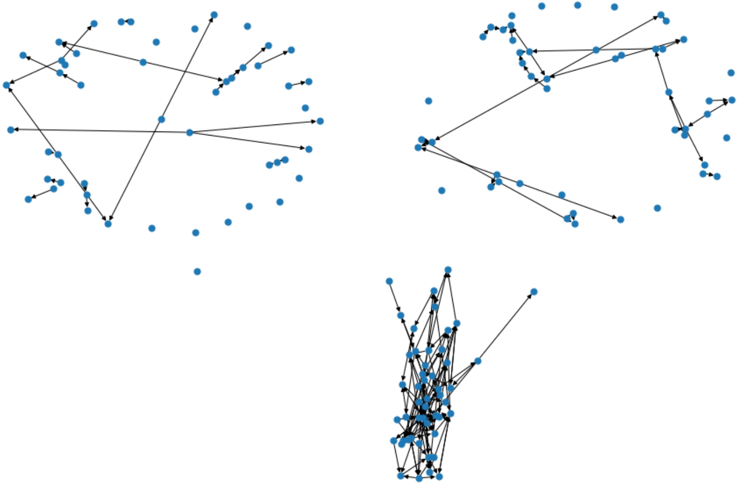
- Essa questão só pode ser discutida considerando um grafo aleatório específico.
- Vamos considerar o primeiro deles: o grafo aleatório de Erdős-Rényi.
- O conjunto de vértices é $V = \{1, \ldots, N\}$.
- Entre dois vértices a e b, $a \neq b$ quaisquer, colocamos uma aresta com probabilidade p_N. Essa decisão é tomada independentemente para cada par de vértices.
- Esse grafo tem uma propriedade maravilhosa. Existe um valor crítico $p^\star$, tal que se $p_N > p^\star$, então com grande probabilidade a grande maioria dos vértices estão conectados entre si.
- Na próxima aula falaremos mais longamente dessa propriedade.

Grafos de Erdős-Rényi não-direcionados



Grafos com $N = 50$ e $p_N = 0,01$, $p_N = 0,02$ e $p_N = 0,1$, respectivamente.

Grafos de Erdős-Rényi direcionados



Grafos com $N = 50$ e $p_N = 0,01$, $p_N = 0,02$ e $p_N = 0,04$, respectivamente.

Referência

O modelo que estamos considerando foi introduzido em 1959 por Paul Erdős e Alfréd Rényi.

P. Erdős, A. Rényi: On random graphs, I., Publ. Math (1959), vol. 6, p. 290–297.