Lógica
Aula 3

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é fbf

Backus Naur Form (BNF)

$$\varphi ::= p|(\neg\varphi)|(\varphi \vee \varphi)|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \rightarrow \varphi)$$

Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

Dedução Natural - Regras da conjunção

Introdução

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$$

Eliminação

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e_1} \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_2}$$

Exemplos

- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

Exemplos

- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
- $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Introdução

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg_i$$

Regras da dupla negação

Eliminação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e$$

Introdução

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg_i$$

Exemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

Regras de eliminação da implicação

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to_e$$

Regras de eliminação da implicação

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to_e$$

Modus Tollens (MT)

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

Exemplos

- $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$

Exemplos

- $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
- $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

Exemplos

- $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$
- $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$
- $\neg p \to q, \neg q \vdash p$

Introdução da Implicação

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to_i$$

Exemplos

- $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

Exemplos

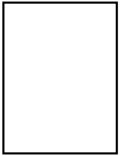
- $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
- $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$

Exemplos

- $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
- $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$
- *T*eorema: $\vdash p \rightarrow p$

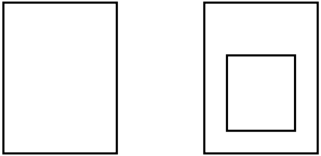
Estruturas de blocos

Pode aninhar



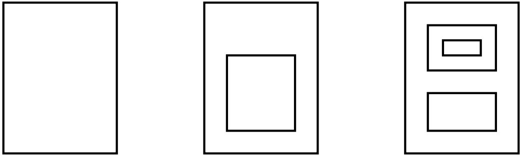
Estruturas de blocos

Pode aninhar



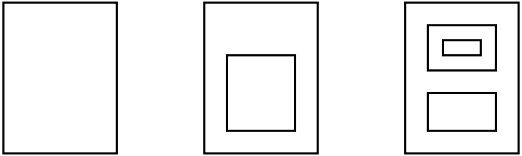
Estruturas de blocos

Pode aninhar

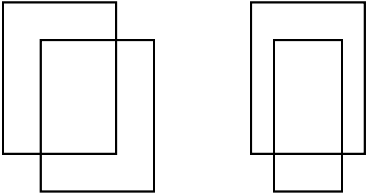


Estruturas de blocos

Pode aninhar



Não pode cruzar



Exemplos

- $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$

Exemplos

- $q \to r, \neg q \to \neg p \vdash p \to r$
- $q \to r \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$

Exemplos

- $q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$
- $q \rightarrow r \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Dedução

De uma prova para

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

obtemos uma prova para

$$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$$

(e vice-versa).