SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-3 – Sistemas lineares
(30 min)

Prof. Miguel Frasson

Setembro de 2020

Sistemas lineares

- De extrema importância em qualquer área é a resolução de sistemas lineares
- Suponha n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e m equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Os números a_{ij} são chamados coeficientes, e os b_i são chamados termos forçantes ou termos constantes.
- Se $0 = b_1 = b_2 = \cdots = b_m$, o sistema é chamado homogêneo.
- Uma solução é uma n-úpla $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de forma que quando substituímos $x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n$, todas as m equações ficam satifeitas.

Exemplo

- $S_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad\quad\;\; x_2 - \;\; x_3 = 0 \end{cases}$
- $(1, 0, 0)$ é uma solução.
- O conjunto solução do sistema S_1 é

$$S = \{(1 - x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Classificação de sistemas

- Os sistemas são classificados em
  - possíveis e determinados (uma única solução)
  - possíveis e indeterminados (infinitas soluções)
  - impossíveis (solução vazia)
- Classifique os sistemas abaixo:

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

- Todo sistema homogêneo é sempre possível, pois sempre tem a solução trivial $(0, 0, \dots, 0)$.

Forma matricial de sistemas

- As matrizes e suas operações foram sistematizadas para trabalhar sistemas de forma fácil, escrevendo apenas os números em arranjos.
- Exemplo: o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

é escrito na forma matricial $AX = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada do sistema

- O sistema na forma matricial $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

pode ser escrito de forma mais eficiente com a matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Sistemas equivalentes

- Dois sistema são equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.
- Um processo eficiente de se resolver um sistema, produzindo uma sequência de sistemas equivalentes, é o escalonamento, também chamado método de Gauss.
- Um sistema escalonado é o que está na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{1j_k}x_{j_k} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2j_1}x_{j_1} + \cdots + a_{2j_k}x_{j_k} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{kj_k}x_{j_k} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

  onde $a_{11} \neq 0$, $a_{2j_1} \neq 0$, $\ldots$, $a_{kj_k} \neq 0$.
- Um sistema escalonado é facilmente resolvido, de baixo para cima.

Operações elementares

- Chamamos as operações de linhas abaixo de operações elementares de linha.
- Observe que todas não alteram soluções e são invertíveis:

1. somar a uma linha, uma múltipla de outra: $L_i \leftarrow L_i + kL_j$
2. multiplicar uma linha por um número $k \neq 0$: $L_i \leftarrow kL_i$
3. intercambiar duas linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$

Exemplo de escalonamento (Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Esse sistema, de baixo para cima, é lido:

$$z = -1, \quad y - 2z = -1 \quad x - y + z = 1$$

e sua solução é

$$z = -1, \quad y = -3, \quad x = -1$$

ou na ordem:

$$x = -1, \quad y = -3, \quad z = -1$$

Exemplo de escalonamento completo (Gauss-Jordan)

Se a matriz dos coeficientes torna-se a matriz identidade, a solução é lida na coluna dos termos constantes

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)
$$

Daí se lê a solução

$$
x = -1, \quad y = -3, \quad z = -1
$$

Efeito de multiplicação nas matrizes elementares

- Quando se multiplica uma matriz aumentada pela esquerda por uma matriz A, cada bloco é multiplicado por A (pela esquerda)

$$A\left(B_1 \mid B_2 \mid \cdots \mid B_k\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid \cdots \mid AB_k\right)$$

- As operações elementares são equivalentes a multiplicar por matrizes à esquerda. Exemplo:

$$L_2 \leftarrow L_2 + kL_1 : \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(B_1 \mid \cdots \mid B_k\right)$$

Sistemas simultâneos

- Escalonamento é feito baseado apenas observando na matriz dos coeficientes.
- Dois sistemas com mesma matriz dos coeficientes têm mesmo escalonamento.
- Então podemos fazer uma matriz aumentada para vários sistemas. Ao escalonar completamente, a solução de cada sistema está em sua respectiva coluna.
- Exemplo: os sistemas abaixo têm a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Sistemas simultâneos

Exemplo: Resolver os sistemas: $Ax = b$, $AY = I$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -3 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -4 & -2 & -2 & 1 & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0
\end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|r|rrr}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0
\end{array}\right)
$$

Exemplo: jogo das luzes (lights out)

- O jogo *Lights out* pode ser resolvido com sistemas lineares, com números em $Z^2 = 0,1$.
- O jogo e sua explicação estão em `https://www.icmc.usp.br/~frasson/ALED/games/luzes.html`