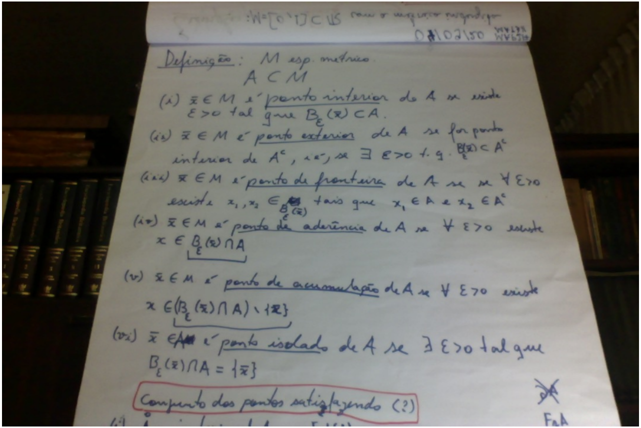
MAP0217+MAT0311 - Aula Complementar - 04-09-2020

Aula Complementar - 04-09-2020

Na parte da aula dada presencialmente vimos definição de diversos conceitos de Topologia de Espaços Métricos, e neste complemento o objetivo é fazer alguns comentários, exemplos e exercicios sobre o assunto.


Definição: M esp. métrico
$A \subset M$
(i) $\bar{x} \in M$ é ponto interior de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A$.
(ii) $\bar{x} \in M$ é ponto exterior de A se for ponto interior de A^c, i.e., se $\exists\ \varepsilon > 0$ t.q. $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A^c$
(iii) $\bar{x} \in M$ é ponto de fronteira de A se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(\bar{x})$ tais que $x_1 \in A$ e $x_2 \in A^c$
(iv) $\bar{x} \in M$ é ponto de aderência de A se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A$
(v) $\bar{x} \in M$ é ponto de acumulação de A se $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $x \in (B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A) \setminus \{\bar{x}\}$
(vi) $\bar{x} \in A$ é ponto isolado de A se $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \{\bar{x}\}$
Conjunto dos pontos satisfazendo (?)

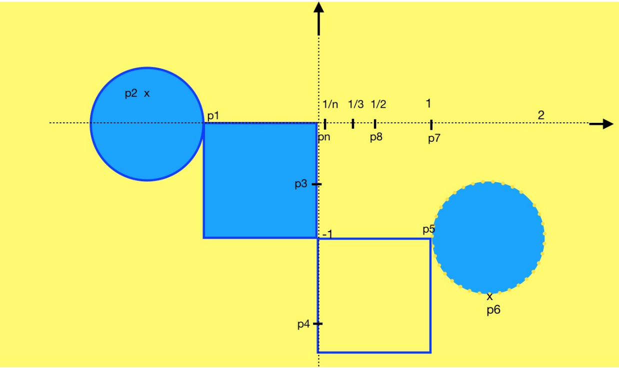
Exemplo 1: Em $M = R^2$ (com a métrica usual) considere o seguinte subconjunto $A \subset \mathbf{R}^2$ e os pontos $p_j = (x_j, y_j)$ destacados. Analisar se cada um deles é ponto interior de A, ponto exterior de A, ponto de fronteira de A, ponto de acumulação de A, ponto de aderência de A, ponto isolado de A.

Aula Complementar - 04-09-2020

Exemplo 1: Em $M = R^2$ (com a métrica usual) considere o seguinte subconjunto $A \subset \mathbf{R}^2$ e os pontos $p_j = (x_j, y_j)$ destacados. Analisar se cada um deles é ponto interior de A, ponto exterior de A, ponto de fronteira de A, ponto de acumulação de A, ponto de aderência de A, ponto isolado de A.

Justificar as conclusões (note que dizer *"p é ponto interior porquê existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(p) \subset A$" não é **justificativa**, pois essa frase só diz que *"é ponto interior porquê satisfaz a definição"*, o que não parece aceitável, certo?

Aula Complementar - 04-09-2020



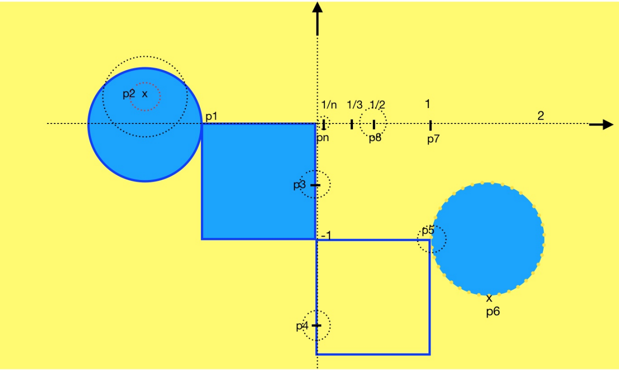
Espaço métrico M = R^2 **A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5 contido em R^2**

A1 = bola fechada de centro (-3/2,0) e raio 1/2

A2 = quadrado de vértice na origem e lado 1, com contorno, no 3o. quadrante
= [-1,0]x[-1,0]
A3 = contorno do quadrado de lado 1 e vértices (0,-1) e (0,-2), no 4o. quadrante
= ({0}x[-1,-2]) U ({1}x[-1,-2]) U ([0,1])x{-1}) U ([0,1])x{-2})
A4 = bola aberta de centro (3/2,-1) e raio 1/2

A5 = { (1/n,0) | n pertence a **N** }

p0 = (0,0), p1 = (-1,0), p2 = (-3/2, 1/4), p3 = (0,-1/2), p4 = (0,-7/4), p5 = (1,-1), p6 = (3/2,-3/2),
p7 = (1,0), p8 = (1/2,0), p9 = (1/3), pn = (1/n,0)



Espaço métrico **M = R^2** **A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5 contido em R^2**

A1 = bola fechada de centro (-3/2,0) e raio 1/2

A2 = quadrado de vértice na origem e lado 1, com contorno, no 3o. quadrante
= [-1,0]x[-1,0]
A3 = contorno do quadrado de lado 1 e vértices (0,-1) e (0,-2), no 4o. quadrante
= ({0}x[-1,-2]) U ({1}x[-1,-2]) U ([0,1])x{-1}) U ([0,1])x{-2})
A4 = bola aberta de centro (3/2,-1) e raio 1/2

A5 = { (1/n,0) | n pertence a **N** }

p0 = (0,0), p1 = (-1,0), p2 = (-3/2, 1/4), p3 = (0,-1/2), p4 = (0,-7/4), p5 = (1,-1), p6 = (3/2,-3/2),
p7 = (1,0), p8 = (1/2,0), p9 = (1/3), pn = (1/n,0)

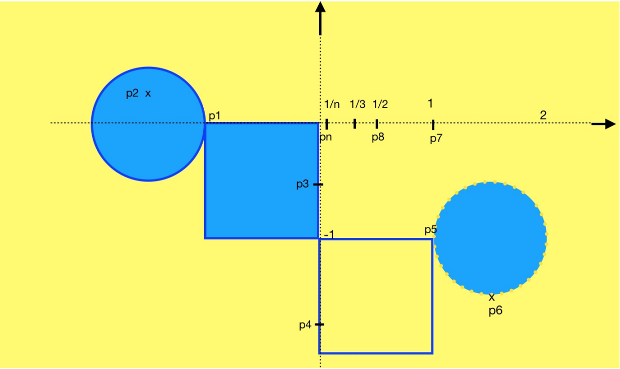
Exemplo 2: Em $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, com a métrica induzida pelo $R2$, considere os pontos $p_j = (x_j, y_j)$ destacados. Analisar se cada um deles é ponto interior de A, ponto exterior de A, ponto de fronteira de A, ponto de acumulação de A, ponto de aderência de A, ponto isolado de A.

Aula Complementar - 04-09-2020

Exemplo 2: Em $M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, com a métrica induzida pelo $R2$, considere os pontos $p_j = (x_j, y_j)$ destacados. Analisar se cada um deles é ponto interior de A, ponto exterior de A, ponto de fronteira de A, ponto de acumulação de A, ponto de aderência de A, ponto isolado de A.

Justificar as conclusões (note que dizer *"p é ponto interior porquê existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(p) \subset A$" não é **justificativa**, pois essa frase só diz que *"é ponto interior porquê satisfaz a definição"*, o que não parece aceitável, certo?

Aula Complementar - 04-09-2020



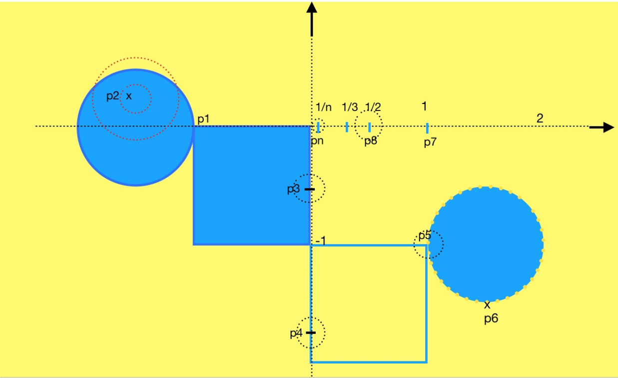
Espaço métrico **M = A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5** **com a métrica induzida por R^2**

A1 = bola fechada de centro (-3/2,0) e raio 1/2

A2 = quadrado de vértice na origem e lado 1, com contorno, no 3o. quadrante
= [-1,0]x[-1,0]
A3 = contorno do quadrado de lado 1 e vértices (0,-1) e (0,-2), no 4o. quadrante
= ({0}x[-1,-2]) U ({1}x[-1,-2]) U ([0,1])x{-1}) U ([0,1])x{-2})
A4 = bola aberta de centro (3/2,-1) e raio 1/2

A5 = { (1/n,0) | n pertence a **N** }

p0 = (0,0), p1 = (-1,0), p2 = (-3/2, 1/4), p3 = (0,-1/2), p4 = (0,-7/4), p5 = (1,-1), p6 = (3/2,-3/2),
p7 = (1,0), p8 = (1/2,0), p9 = (1/3), pn = (1/n,0)



Espaço métrico M = A = A1 U A2 U A3 U A4 U A5 com a métrica induzida por R^2

A1 = bola fechada de centro (-3/2,0) e raio 1/2

A2 = quadrado de vértice na origem e lado 1, com contorno, no 3o. quadrante
= [-1,0]x[-1,0]

A3 = contorno do quadrado de lado 1 e vértices (0,-1) e (0,-2), no 4o. quadrante
= ({0}x[-1,-2]) U ({1}x[-1,-2]) U ([0,1])x{-1}) U ([0,1])x{-2})

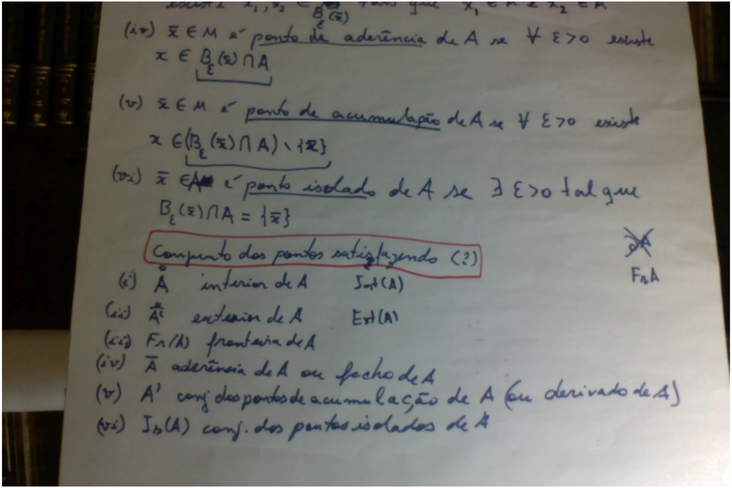
A4 = bola aberta de centro (3/2,-1) e raio 1/2

A5 = { (1/n,0) | n pertence a **N** }

p0 = (0,0), p1 = (-1,0), p2 = (-3/2, 1/4), p3 = (0,-1/2), p4 = (0,-7/4), p5 = (1,-1), p6 = (3/2,-3/2),
p7 = (1,0), p8 = (1/2,0), p9 = (1/3), pn = (1/n,0)

Aula Complementar - 04-09-2020

Vimos também na última aula online aula:



existe $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(\bar{x})$ tais que $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$

(iv) $\bar{x} \in M$ é ponto de aderência de A se $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in \underbrace{B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A}$

(v) $\bar{x} \in M$ é ponto de acumulação de A se $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in \underbrace{(B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A) \setminus \{\bar{x}\}}$

(vi) $\bar{x} \in A$ é ponto isolado de A se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A = \{\bar{x}\}$

Conjunto dos pontos satisfazendo (?)

$\cancel{\partial A}$ $Fr A$

(i) $\mathring{A}$ interior de A $Int(A)$

(ii) $\mathring{A^c}$ exterior de A $Ext(A)$

(iii) $Fr(A)$ fronteira de A

(iv) $\bar{A}$ aderência de A ou fecho de A

(v) A' conj. dos pontos de acumulação de A (ou derivado de A)

(vi) $Is(A)$ conj. dos pontos isolados de A

Aula Complementar - 04-09-2020

Em cada um dos exemplos 1 e 2 anteriores, apresente os conjuntos:

$$\mathring{A}, Ext(A), Fr(A), \overline{A}, A' \text{ e } Is(A).$$