Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 2 - Semana 31/8 – 4/9

Exercício 1. *Estude as sequências quanto a convergência ou divergência*

(a) $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$.

(b) $\left(\frac{n^3}{(\ln 2)^n}\right)$.

(c) $\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{n^{2n}}\right)$.

(d) $\left(\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{n!}\right)$.

(e) $\left(e^{2n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)$.

(f) $\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n}\frac{1}{(-3)^n}\right)$.

Solução. (a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} < 1\end{aligned}$$

Do teste da razão para sequências concluímos que a sequência converge e converge para 0.

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} \\ &= \frac{1}{\ln 2}\left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\right)^3 \\ &= \frac{1}{\ln 2}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{\ln 2} > 1.\end{aligned}$$

Do teste da raiz para sequências, concluímos que a sequência diverge.

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}\end{aligned}$$

É fácil ver que $\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+1} = 4$ e por outro lado temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \frac{1}{e^2}.$$

Por fim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{e^2} < 1$$

Do teste da razão para sequências, a sequência converge e converge para 0.

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2(n+1)+1)}{3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n+1)}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1} = 2 > 1.$$

Do teste da razão para sequências, concluímos que a sequência diverge.

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{2n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}\\ &= e^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= e^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\ &= e^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\\ &= e^2\frac{1}{e}\\ &= e.\end{aligned}$$

Do teste da razão para sequências, a sequência diverge.

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\\ &= \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Do teste da raiz para sequências, a sequência converge e converge para 0.

□

Exercício 2. *Determine a soma das séries*

(a) $5 + \frac{5}{9} + \dots + \frac{5}{9^{k-1}} + \dots$

(b) $5 - \frac{5}{9} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{5}{9^{k-1}} + \dots$

Solução. (a) Considere a sequência de somas parciais (s_n) da série geométrica dada. Assim

$$\begin{aligned}s_1 &= 5 + 5\frac{1}{9} = 5\left(1+\frac{1}{9}\right)\\ s_2 &= 5 + 5\frac{1}{9} + 5\frac{1}{9^2} = 5\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2\right)\\ &\vdots\\ s_n &= 5 + \frac{5}{9} + \dots + \frac{5}{9^n} = 5\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)\\ &\vdots\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{9} \neq 1$, temos

$$s_n = \frac{5\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{9}}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Mas sabemos que $\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \to 0$ com $n \to \infty$, porque $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{1-\frac{1}{9}} = \frac{45}{8}$$

Portanto,

$$5 + \frac{5}{9} + \cdots + \frac{5}{9^{k-1}} + \cdots = \frac{45}{8}.$$

(b) Argumentando como na solução do item (a) com $-\frac{1}{9}$ no lugar de $\frac{1}{9}$, obtemos

$$s_n = \frac{5\left(1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{5}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{2}$$

Portanto,

$$5 - \frac{5}{9} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{5}{9^{k-1}} + \cdots = \frac{9}{2}.$$

□

Exercício 3. *Mostre que a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} 2^{-k}$$

é divergente

Demonstração. Notemos que

$$\sum_{k=0}^{m} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-2^{-(m+1)}).$$

Em particular, para $m = 2^n$, temos

$$\sum_{k=0}^{2^n} 2^{-k} = \frac{1-2^{-(2^n+1)}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-2^{-(2^n+1)}).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n} 2^{-k} = 2 \neq 0,$$

segue do Critério da Divergência que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n} 2^{-k}$ diverge. □

Exercício 4. *Determine se as séries são convergentes ou divergentes*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\frac{1}{k}$.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} [1+(-1)^k]$.

Demonstração. (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+3}.$$

Sabendo que

$$\left(\lim a_n \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}\right)$$

Temos

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2}\frac{1}{1+\frac{3}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{k^2}} = 1$$

Portanto a série diverge

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$$

Novamente, usando que

$$\left(\lim a_n \neq 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \right)$$

Temos

$$\lim_{k \to \infty} k \sin \frac{1}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Sendo $\frac{\sin u}{u} = 1$ o primeiro limite fundamental.

Com isso temos que a série diverge.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} [1 + (-1)^k]$$

Observando que $\lim_{k \to \infty} [1 + (-1)^k]$ não existe, temos também que a série diverge

$\square$