Exercício 1)

X - profundidade de um lençol de água em uma região

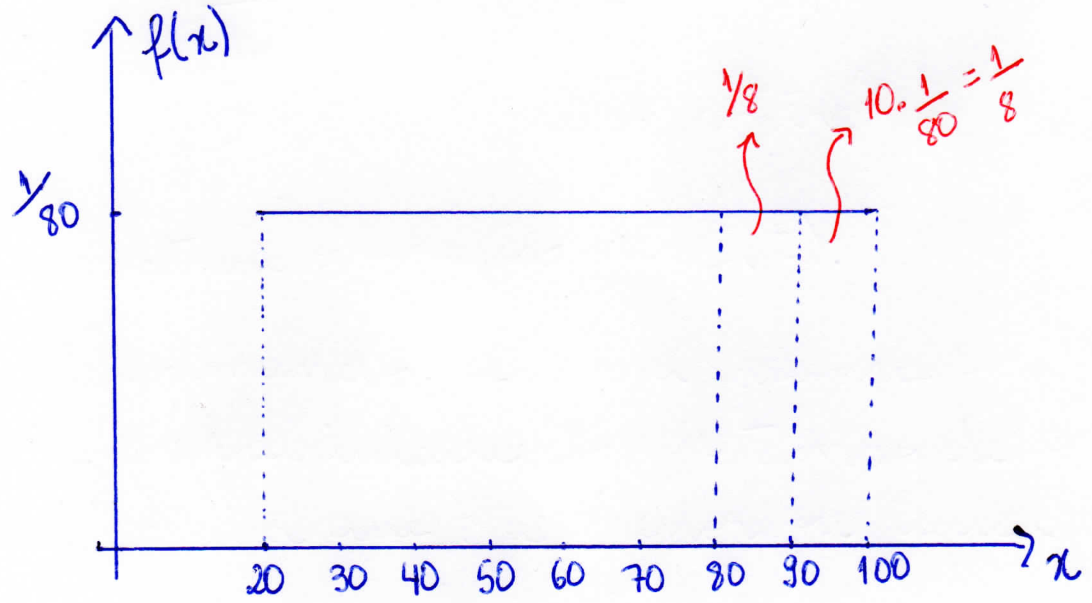
Pode ser qualquer ponto entre 20 e 100 m.

Intervalo de possíveis valores da variável

$[20, 100]$

Como todos os intervalos de mesma amplitude são equiprováveis:

$$\underbrace{P(20 \leq X \leq 30) = P(30 \leq X \leq 40) = \dots = P(90 \leq X \leq 100)}_{8 \text{ intervalos}} = \frac{1}{8}$$



Área $= \frac{1}{80} \cdot 80 = 1$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1/80 & 20 \leq x \leq 100 \\ 0 & x < 20 \text{ ou } x > 100 \text{ (caso contrário)} \end{cases}$$

$$P(25 \leq X \leq 29) = 4 \cdot \frac{1}{80} = \frac{4}{80}$$

área entre 25 e 29 abaixo de $f(x)$

Esta é a distribuição Uniforme no intervalo $[20, 100]$.

Exercício 2

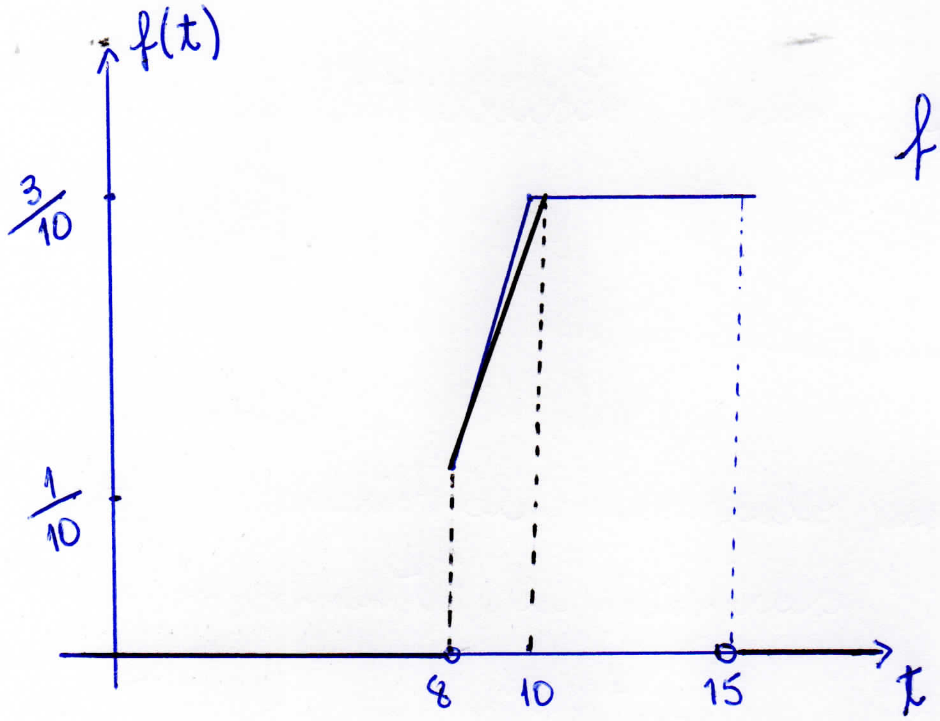
Teste educacional realizado para avaliar o desenvolvimento de crianças

T - tempo em minutos de execução do teste

Modelo teórico propõe que a v. a. contínua T tem função densidade de probabilidades

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t-4) & 8 \leq t < 10 \\ \frac{3}{20} & 10 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Gráfico de $f(t)$



$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{\frac{9}{20} + \frac{1}{10}}{2} \cdot 2 + 5 \cdot \frac{3}{20} = \frac{5}{20} + \frac{15}{20} = 1$$

$$P(9 < T \leq 12) =$$

$$= \int_9^{12} f(t)\, dt = \int_9^{10} \left(\frac{1}{40} t - \frac{1}{10} \right) dt + \int_{10}^{12} \frac{3}{20}\, dt =$$

$$\left[\frac{t^2}{80} - \frac{t}{10} \right]_9^{10} + \frac{3}{20} t \Big|_{10}^{12} = \frac{100}{80} - \frac{10}{10} - \frac{81}{80} + \frac{9}{10} + \frac{36}{20} - \frac{30}{20}$$

$$= \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

Lembrando

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$E(kX) = k\,E(X)$ k constante

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

X e Y independentes $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$Var(kX) = k^2 Var(X)$ k constante

Medidas de Posição (ou de tendência central) para variáveis aleatórias contínuas

Definição 2

O valor esperado ou média da variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidades $f(x)$ é

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx .$$

Definição 3

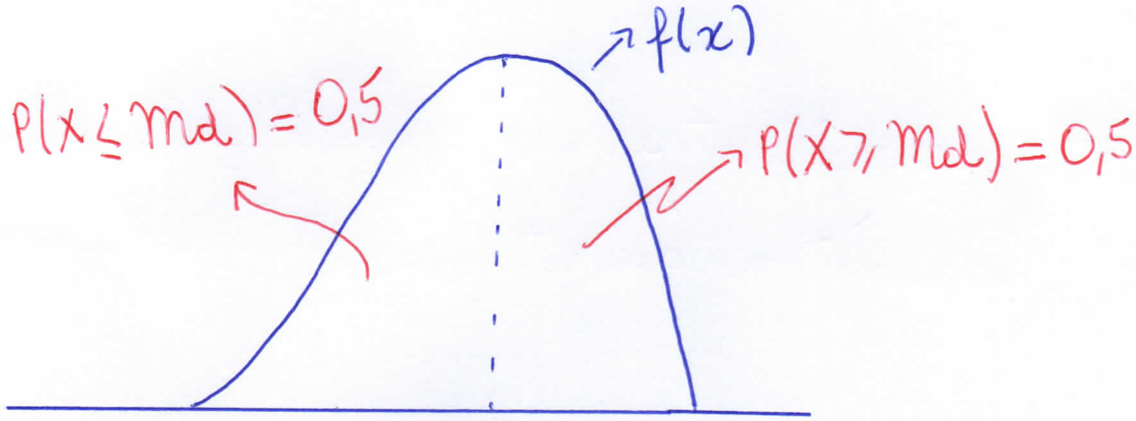
A mediana de X, Md, é tal que

$$P(X \geq Md) \geq 0{,}5 \quad e \quad P(X \leq Md) \geq 0{,}5 .$$

Esta é a definição geral de Mediana.

No caso de variáveis aleatórias contínuas, esta definição é equivalente a

Md é tal que $P(X \leq Md) = P(X \geq Md) = 0{,}5$.



Como $P(X \leq K) = \int_{-\infty}^{K} f(x)\,dx$, basta determinar o valor de K tal que

$$\int_{-\infty}^{K} f(x)\,dx = 0,5 .$$

Automaticamente tem-se

$$P(X \geq K) = P(X > K) = 1 - P(X \leq K) = 0,5 .$$

Definição 4

A moda M_0 é o valor de X que maximiza $f(x)$, ou seja,

$$f(M_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) .$$

No exemplo

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10}(t-4) & 8 \leq t < 10 \\ \frac{3}{20} & 10 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt = \int_{8}^{10} \frac{t}{10}(t-4)\,dt + \int_{10}^{15} \frac{3}{20} t\,dt =$$

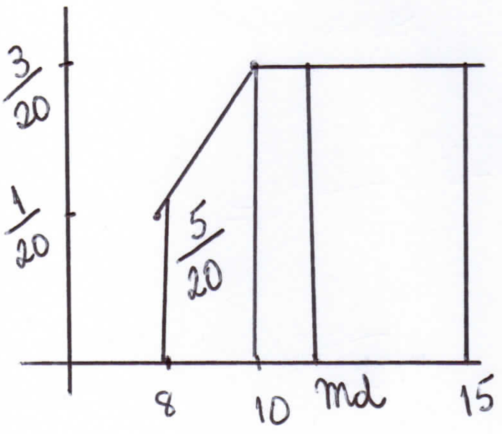
$$= \left[\frac{t^3}{120} - \frac{4t^2}{80}\right]_8^{10} + \frac{3t^2}{40}\Bigg|_{10}^{15} =$$

$$= \frac{1000}{120} - \frac{400}{80} - \frac{512}{120} + \frac{256}{80} + \frac{675}{40} - \frac{300}{40} = 11{,}64$$

deve estar entre 8 e 15

Moda - $M_o \in [10, 15]$

Mediana Md - Usar o gráfico de $f(x)$



$$(15 - Md) \times \frac{3}{20} = 0,5$$

$$15 - Md = \frac{10}{3}$$

$$Md = \frac{35}{3} = 11,666\ldots$$

Metade das crianças executam o teste em tempo inferior a 11,66 minutos e metade em tempo superior.

Dada uma v.a. contínua com função densidade de probabilidades $f(x)$.

<u>Definição 5</u>

A variância de X é calculada como

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Lembrar que $\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = E(X^2) - \mu^2$.

No exemplo

$$E(T) = \mu = 11{,}64 \text{ min}$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{8}^{10} \frac{t^2}{40}(t-4)\,dt + \int_{10}^{15} \frac{3}{20} t^2\,dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{160} - \frac{4t^3}{120}\right]_8^{10} + \frac{3t^3}{60}\Bigg|_{10}^{15} =$$

$$= \frac{10^4 - 8^4}{160} - \cancel{4}\,\frac{10^3 - 8^3}{30} + \frac{15^3 - 10^3}{20} = 139{,}38$$

$$Var(T) = 139{,}38 - 11{,}64^2 = 139{,}38 - 135{,}48 =$$

$$= 3{,}9 \text{ min}^2 = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{3{,}9} \simeq 1{,}97 \text{ min}$$

↳ possui a mesma unidade da variável original

Principais Distribuições Contínuas

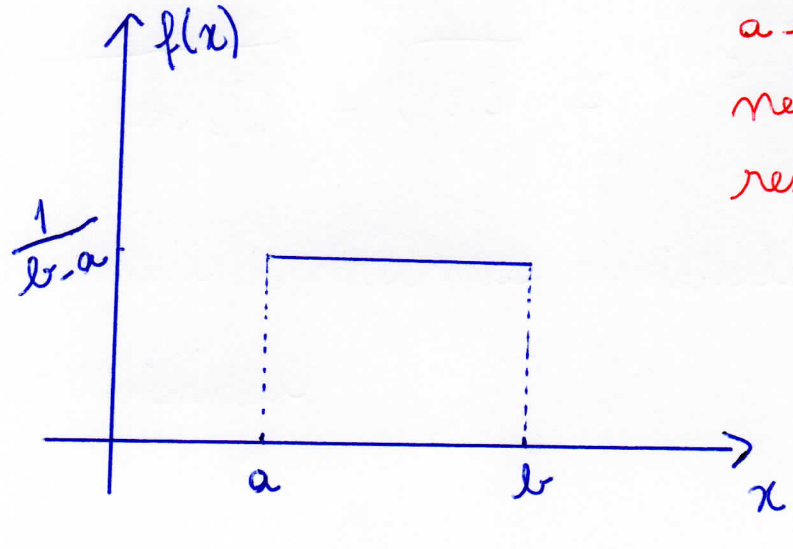
Seção 6.2 - Magalhães e Lima

Distribuição Uniforme Contínua

A variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, $a < b$, se sua função densidade de probabilidades é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U[a, b]$



a e b podem ser negativos. Única restrição, $a < b$.

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

ponto médio do intervalo

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ex 6.5 pag 190

Tubos de PVC de 6m submetidos a pressão

X - distância do 1º vazamento com relação a uma das extremidades fixada a priori.

Admitindo igual probabilidade de ocorrência de vazamento em intervalos de mesma amplitude,

$X \sim U[0, 6]$

Deseja-se calcular a probabilidade do vazamento estar no máximo a um metro das extremidades.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P\Big(X \in \{\underbrace{[0,1] \cup [5,6]}^{\text{disjuntos}}\}\Big) = P(0 \leq X \leq 1) + P(5 \leq X \leq 6)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6}\,dx + \int_5^6 \frac{1}{6}\,dx = \frac{x}{6}\Big|_0^1 + \frac{x}{6}\Big|_5^6 = \frac{1-0}{6} + \frac{6-5}{6} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

Exercícios

1) Considere a f.d.p. de X

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine k.

b) Calcule $P(0 \leq X \leq 4)$.

a) $\int_0^{10} kx\,dx = 1$

↳ Primitiva de kx: $k\frac{x^2}{2}$

$$k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = \frac{k\,100}{2} - \frac{k.0}{2} = 1$$

$50k = 1 \qquad k = \frac{1}{50}$

b) $P(0 \leq X \leq 4) = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{x}{50}\,dx =$

$$= \frac{1}{50}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{16}{100}$$

2) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidades.

b) Calcule $P(X > 10)$.

3) A demanda diária de arroz em um supermercado (em centenas de quilos) é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

a) Quanto o gerente do supermercado espera vender em 30 dias?

b) Qual é a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição diariamente, para que falte arroz em no máximo 5% dos dias?