SÉRIES DE FUNÇÕES

Se a cada inteiro positivo n for associada uma função $f_n(x)$, diz-se que as funções $f_n(x)$ formam uma sequência de funções.

Vamos supor que as funções sejam todas definidas sobre um mesmo intervalo I do eixo x.

$$1 \to f_1(x), \quad 2 \to f_2(x), \quad 3 \to f_3(x), ..., \; n \to f_n(x) \quad ....$$

Logo para cada $x \in I$, a sequência $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pode convergir or divergir.

Queremos determinar os valores de $x \in I$ para os quais a sequência $f_n(x)$ converge.

Analogamente vale as mesmas observações para a series infinitas cujos termos são funções:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Observe que a n-esima soma parcial

$$S_n = S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x)$$

é uma função que depende de x. Logo

Se para determinados valores de x, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ (isto é se converge para $S(x)$) então

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \qquad \text{para esse conjunto de valores de x.}$$

EXEMPLO 1): A série de funções:

$$1 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

pode ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Observe que ela é de fato uma série geométrica onde a razão é $r = x$, a qual nos ja conhecemos o comportamento de convergência. Portanto podemos concluir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{se } |x| < 1$$

$$\textit{Diverge} \qquad \text{se } |x| \geq 1.$$

Definição A série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é chamada uma série de potencias ao redor de $x = 0$.

EXEMPLO 2): Seja a série:

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + ... + \frac{1}{n^x} + ...$$

a qual pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Observe que ela é de fato uma p-série com $p = x$. Logo como ja conhecemos o comportamento das p-séries, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{converge se } x > 1$$

$$\textit{Diverge} \quad \text{se } x \leq 1.$$

Observação: Os critérios de convergência de uma série de funções são os mesmos que aqueles para séries numéricas, pois para cada escolha particular de x (ou fixado um x), a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uma série de números reais.

A ideia é estudar a convergência de séries de funções quando x percorre o intervalo I. Vemos que alguns critérios de convergência fornece os valores para os quais a série converge.

EXEMPLO 3): Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Pelo critério da razão temos que essa série de funções converge para os x tais que quando calculado o limite da razao, tal limite é < 1. Mais explicitamente

$$|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}| = |\frac{x}{n+1}| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}| = 0 < 1$$

segue-se pelo critério da razão que a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado.

EXEMPLO 4): Considere a série

$$-1 + e^{-\sin x} - e^{-2\sin x} + e^{-3\sin x} - .... + (-1)^{n+1}e^{-n\sin x} + ...$$

Ela pode ser escrita como uma série alternada da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\sin x}$$

Como a série é alternada estudamos ela como tal.

Primeiro: os $b_n = e^{-n\sin x} > 0$.

Segundo: os b_n formam uma sequência decrescente: Pois para $0 < x < \pi$ temos que $\sin x > 0$ logo

$$-n\sin x > -(n+1)\sin x.$$

Então

$$e^{-n\sin x} > e^{-(n+1)\sin x} \qquad \text{portanto} \qquad b_{n+1} < b_n \quad \text{para todo} \quad n.$$

Logo decresce.

Terceiro:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} e^{-n\sin x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n\sin x}} = 0,$$

pois como x é fixo e $\sin x > 0$, então $n\sin x > 0$.

Portanto pelo critério da série alternada ou critério de Leitbniz, temos que quando x é tal que $0 < x < \pi$ a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\sin x}$ converge.

Mais geral, a série converge para os valores de x tais que

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi, \qquad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}.$$