Recapitulação:

1. vimos uma motivação para a necessidade de estender a noção de Integral e colocamos o problema de medir comprimentos, áreas, volumes, etc.
2. Definimos anel, álgebra e sigma-
3. Vimos Ax. Escolha
4. Vimos Cardinalidade: Teo de Cantor Bernstein, card de N, R, Q, Z, N^k, Partes (X)
5. Lista de anel, álgebra e sigma-

Definição: f mensurável f:X,A---> R, B se {x/f(x)>a} pertence a A para todo a em RPropriedades Imediatas a partir da Definição:

1.Se f e g mensuráveis Então f+g mensurável.

Pegamos r_n uma enumeração dos racionais. Então {x/ f(x)+g(x)> a}= União de N=1 até infinito de ({f>a/2+r_n} Interseção {g>a/2 - r_n}) . É claro que o segundo membro está incluido no primeiro. Recíprocamente, se f(x)+g(x)>a então f-a/2 > a/2 -g. Seja um racional r com f-a/2 >r> a/2 -g. Logo f>a/2+r e g>a/2-r.

2.cf mensurável , c um real. Se c=0, ok.. Seja c>0 {cf>a}={f>a/c},Se c<0 então {cf>a}={f<a/c} mensurável porque {f<d} é mens por hipótese.

3.f^2 mensurável: {f^2>a}={f>Raíz de a} União {f<-raíz de -a}

4.fg mensurável: fg = [(f+g)^2-(f-g)^2]/4

```
Seja {f_n} uma sequência de funções mensuráveis. Então
h(x)=Sup(f_n(x)) é mensurável.
{x/h(x)>a}= União de 1 até infinito {x/ f_n(x)>a}
Recíprocamente, se h(x)=b>a, existe um índice m tal que f_m(x)>
(b+a)/2. Como b> (b+a)/2>a, e h(x) é o supremo das f_n(x),
existe um índice m tal que h(x)= sup (f_n(x))=b >f_m(x)>
(b+a)/2.
Inf(f_n(x)) é mensurável, analogamente.
Lim sup(f_n(x))= inf  (sup f_k(x))  é mensurável.
                             n       k>n
Lim inf(f_n(x))=  sup ( inf f_k(x)) é mensurável.
                             n       k>n
Logo lim(f_n(x)) é mensurável se existir. Porque quando ele
existe, temos lim(f_n(x)) =Lim inf(f_n(x))=Lim sup(f_n(x)) os
dois mensuráveis.
```

Exemplo: g é a função de Dirichlet em $[0,1]$

$g=\{1$ se x racional

$\{ \ 0$ se x irracional

1. é mensurável. $\{x/g(x)>a\}$ vazio de $1=<a$ mens

Racionais se $0=<a<1$ mens

Reais se $a<0$

(Observação: os Borelianos contém os pontos $\{c\}$. Porque $\{c\}=$ Interseção enumerável de $(c-1/n,c+1/n)$).

2. Vejamos que $g = \lim f_n$, onde f_n é monótona.

Tomamos uma enumeração do racionais r_n e definimos

$f_n(x)= \{1$ se $x=r_1,\ldots, r_n$

$\{ \ 0$ em outro caso

formam uma seq monótona não decrescente. Cada f_n é mensurável.

logo o $\lim f_n$ resulta mensurável.