Exemplos de funções mensuráveis =

1. Se $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$ borelianos e X_1 espaço topológico ou métrico, $\mathcal{A}_1$ deve conter os borelianos de X_1, para que as funções contínuas sejam mensuráveis (2)

2. Também as funções degrau são mensuráveis

3. Se $E \subset \mathcal{A}_1 \Rightarrow \chi_{E}$ (função caraterística de E) é mensurável

4. Se $E_1, \dots, E_n \subset \mathcal{A}_1$ as combinações lineares de $\chi_{E_1}, \dots, \chi_{E_n}$ são mensuráveis

—·—

Se f a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ temos

f mensurável $\Longleftrightarrow$

a. $\{f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}_1 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

b. $\{f(x) < \beta\} \in \mathcal{A}_1 \ \forall \beta \in \mathbb{R}$

para a) obs que $\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\}$

$\{f = -\infty\} = \{\bigcup_1^{\infty} f > -n\}^c$, logo os 2 conjuntos são mensuráveis.

Lema: f a valores em $\overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow A = \{f = +\infty\}$, $B = \{f = -\infty\} \in \mathcal{A}_1$ e a função g a valores em $\mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A, x \notin B \\ 0 & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

for mensurável