Funções Mensuráveis

Sejam $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ dois espaços com σ-álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ respectivamente. $(\mathbb{X}_i, \mathcal{A}_i)$ chama-se um <u>espaço de medida</u>.

(1)

<u>Def</u>: Seja $f:(\mathbb{X}_1, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{X}_2, \mathcal{A}_2)$. Dizemos que f é <u>mensurável</u> se $\forall\ B \in \mathcal{A}_2$ temos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$

<u>Ex</u>: Quais são as func. mensuráveis:

a), Se $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \mathbb{X}_2\}$ (R = todas)

b) dado $E \subsetneq \mathbb{X}_2$, $E \neq \emptyset$ definimos $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, E, E^c, \mathbb{X}_2\}$

(R = f mensurável $\iff f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$)

b') as func const são mens.

c) $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. $(\mathbb{X}_2, \mathcal{A}_2)$ qualquer f (R = todas)

d) Se $\mathbb{X}_2 = \mathbb{R}$, temos que as constantes são mensuráveis

Nesta disciplina trabalharemos sobre tudo com

$$f:(\mathbb{X}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{L}) \text{ onde}$$

$\mathcal{B}$ é a σ-álgebra dos borelianos e $\mathcal{L}$ é a σ-álgebra dos "completamento" de $\mathcal{B}$, ou conjuntos de Lebesgue. Veremos mais adiante o que é $\mathcal{L}$ com detalhe.

Neste caso a definição fica:

$f:(\mathbb{X}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é <u>mensurável</u> se $f^{-1}((a,+\infty)) \in \mathcal{A}_1\ \forall a$.

Ou seja, basta que as f^{-1} de "geradores" de $\mathcal{B}$ verifiquem a propriedade.

Já vimos que $\mathcal{B}$ é gerada por $\{(a,b)\}$, $\{[a,b]\}$, $\{(a,b]\}$, etc.

As funções mensuráveis a valores em $\mathbb{R}$ serão as que integraremos. Também haverá $\overline{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{C}$