MAT 0234 - Medida e Integração

IME-USP. Segundo semestre de 2020

Aulas 3 e 4

Vamos ver funções mensuráveis. Definição geral e definição para funções a valores em $\mathbb{R}, \bar{R}, \mathbb{C}$. Propriedades.

1. se f e g são mensuráveis então $f+g$, fg, $\alpha f+\beta g, f^{+}=sup(f(x),0), |f|$ também são mensuráveis

2. Seja $f:(\mathbb{R}^n,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ com $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos Borelianos e f contínua. Então f é mensurável.

3. Se (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X. Então $sup(f_n(x)), inf(f_n(x)), limsup(f_n(x)),$ são funções mensuráveis.

Construiremos as funções seguintes que usaremos bastante depois:

1. $0\le\phi_n\le\phi_{n+1}$
2. $f(x)=lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
3. ϕ_n só tem um número finito de valores .
4. Se f limitada então $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

Seja $f:(X,\boldsymbol{A})\to\mathbb{R}$ mensurável, $f\ge0$. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções mensuráveis tal que:

1. $0\le\phi_n\le\phi_{n+1}$
2. $f(x)=lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
3. ϕ_n só tem um número enumerável de valores .
4. $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

1. $0\le\phi_n\le\phi_{n+1}$
2. $f(x)=lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
3. ϕ_n só tem um número finito de valores .
4. Se f limitada então $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

Seja $f:(X,\boldsymbol{A})\to\mathbb{R}$ mensurável, $f\ge0$. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções mensuráveis tal que:

1. $0\le\phi_n\le\phi_{n+1}$
2. $f(x)=lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
3. ϕ_n só tem um número enumerável de valores .
4. $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

Também veremos o conjunto $\bar{R}=\mathbb{R}\ \cup+\infty\ \cup-\infty$ chamado o **sistema dos reais estendidos**. Com a ordem e operações usuais entre os elementos de $\mathbb{R}$ e $-\infty<a<+\infty$. Definiremos $0.-\infty=0.+\infty=0$.

Para a aula 4, recapitularemos o que vimos na aula 3 e construiremos a sequência de funções mencionada acima. Talvez tenhamos tempo para iniciar a definição de medida. Mas isto não é certo.