MAT 0234 - Medida e Integração

IME-USP. Segundo semestre de 2020

Aula 4: conceito e propriedades de Medida (início)

Definição: dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, uma **medida** μ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$
que verifica:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\mu(E) \geq 0 \; \forall \; E \; \subset \; \mathcal{A}$

(c) $se\{A_j\} \subset \mathcal{A}$, $j \; \in \; \mathbb{N}$, disjuntos 2 a 2, temos $\mu(\cup_{j=1}^{+\infty}) = \sum_{j=1}^{=\infty} \mu(A_j)$. Neste caso dizemos que μ *é* $\sigma -$ **aditiva**

Se μ não tomar o valor $+\infty$, dizemos que μ é **finita**.

Exemplos:

(a) $\mu : \wp(N) \to \bar{R}^+$ medida de contagem, ou seja $\mu(A) =$ número de elementos em A.

(b) $\lambda \; : \; \wp(N) \to \bar{R}^+$ com $\lambda(n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ e $\lambda(A) = \sum_{n \, \in \, A} \dfrac{1}{2^{n+1}}$ tem $\lambda(\mathbb{N}) = 1$ ou seja que é uma probabilidade.

(c) $\delta_a \;\; : X \to \mathbb{R}$ medida de Dirac dada por $\delta_a(E) = 1$ se $a \;\in\; E$; e $\delta_a(E) = 0$ se $a \;\notin\; E$. Toda a medida está num único ponto.
Sobre a pergunta de aplicações, a δ_a é utilizada para designar por exemplo um impulso instantâneo. Por exemplo, na equação da mola, pode aparecer no segundo membro como uma força instantânea. Para resolver esta equação (a coeficientes constantes) pode ser usada a Transformada de Laplace.

(d) Medida de Lebesgue ou Borel-Lebesgue nos Borelianos de $\mathbb{R}$ ou também no intervalo X=[a,b]. Nos intervalos vale: $\mu([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$

(e) Medida de Lebesgue ou Borel-Lebesgue nos Borelianos de $\mathbb{R}^2$ ou também no retângulo X=[a,b]x [c,d]. Nos retângulos $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ vale $\mu(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

(f) Outra medida: $\lambda((a, b)) = b^3 - a^3$ nos intervalos, estende-se a uma medida sobre os borelianos de $\mathbb{R}$ $(a \;\leq\; b)$. Observe que $\lambda(\cup_1^{+\infty} \; (a_j, b_j)) = \sum_1^{+\infty} \;\; \lambda(a_j, b_j) = \sum_1^{+\infty}(b_j^3 - a_j^3)$ se forem disjuntos.

(g) Seja $\phi \;:\; \wp(N) \to \bar{R}^+$ dada por $\phi(A) = 0$ se A finito , e $\phi(B) = 1$ se B infinito. Então não é σ-aditiva nem aditiva.

(h) Seja $\phi \;:\; \wp(N) \to \bar{R}^+$ dada por $\phi(A) = 0$ se A finito , e $\phi(B) = +\infty$ se B infinito. Então não é σ-aditiva mas é aditiva.

Propriedades da medida:

(a) Se $A \;\subset\; B$ então $\mu(A) \;\leq\; \mu(B)$
Porque $B = A \cup (B - A)$ onde A, B-A são conjuntos disjuntos. Logo $\mu(B) = \mu(A) \;+\; \mu(B - A) \;\geq\; \mu(A)$

(b) Se $A \;\subset\; B$ então $\mu(B - A) \;=\; \mu(B) \;-\; \mu(A)$
Segue da igualdade $\mu(B) \;=\; \mu(A) \;+\; \mu(B - A)$.

(c) μ é finitamente aditiva, ou seja, se $\{A_j\}_1^n \subset \mathcal{A}$, disjuntos 2 a 2, temos $\mu(\cup_{j=1}^{n}) = \sum_1^n \; \mu(A_j)$. Com efeito, basta considerar a sequência $\{A_j\} \subset \mathcal{A}$, $j \;\in\; \mathbb{N}$, com $A_{n+k} = \emptyset \; \forall \; k \;\in\; \mathbb{N}$ e usar a σ-aditividade.