MAT 0234 - Medida e Integração

IME-USP. Segundo semestre de 2020

Aula 4

Recapitulação e Início

Também vimos o conjunto $\bar{R} = \mathbb{R} \cup +\infty \cup -\infty$ chamado o **sistema dos reais estendidos**.
Define-se tem a ordem e operações usuais entre os elementos de $\mathbb{R}$ e a ordem $-\infty < a < +\infty$.
Também $a(+-\infty) = sinal(a)(+-\infty)$ $a \neq 0$ e $a + (+-\infty) = +-\infty$.
Também $0.-\infty = 0.+\infty = 0$.
Não será definido $+\infty - (+\infty)$; $-\infty + \infty$; $+-\infty^{-1}$.
Topologia de $\bar{R}$: os abertos são os abertos gerados pelos abertos de $\mathbb{R}$ e os conjuntos $[-\infty, a)$, $(b, +\infty]$ $a,\ b \in \mathbb{R}$

Incidentalmente vimos que os Borelianos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ ou num espaço métrico, contém os conjuntos formados por um único ponto. Com efeito, em $\mathbb{R}$ temos $a = \cap_{j=1}^{+\infty}(a - \frac{1}{j}, a + \frac{1}{j})$.

Vimos a definição de espaços mensuráveis e de funções mensuráveis . Definição geral e definição para funções a valores em $\mathbb{R}, \bar{R}, \mathbb{C}$.
Para verificar que uma função $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é mensurável basta verificar que $x \in X\ com\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}\ \forall\ a \in \mathbb{R}$ ou para qualquer outra família geradora de $\mathcal{B}$.
Depois mostramos que:

1. se f e g são mensuráveis então $f + g$, fg, $\alpha f + \beta g, h(x) = sup(f(x), g(x), f^+ = sup(f(x), 0), f^- = -inf(f(x), 0), |f| = f^+ + f^-$ também são mensuráveis.

2. Propriedades do limite de sequências.
   Se (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X.

   Então $sup(f_n(x)), inf(f_n(x)), limsup(f_n(x)), liminf(f_n(x)), lim(f_n(x))$ são funções mensuráveis.

3. vimos o exemplo da função de Dirichlet que é mensurável pela definição, mas também é mensurável por ser limite de uma sequência (monótona) de funções mensuráveis.

4. Outro exemplo. se f tiver derivada f', então f' é mensurável porque $f'(x) = \lim_{n\to+\infty}[n\ \{f(x + \frac{1}{n})\ -\ f(x)\}]$.

5. Seja $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ com $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos Borelianos de X e f contínua. Então f é mensurável.

6. Se f mensurável e $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ contínua então g(f(x)) mensurável.

Construamos as funções seguintes que usaremos bastante depois, sendo $f\ \geq\ 0$:

1. $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$

2. $f(x) = lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$

3. ϕ_n só tem um número finito de valores .

4. Se f limitada então $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

Seja uma partição P_n do intervalo [0,n] do eixo das ordenadas, por intervalos da forma $[j, j+1)/2^n\ j = 0, ...n2^n - 1$. Consideremos
$E_{j,n} = \{x\ \in\ X\ j2^{-n}\ \leq\ f(x)\ < (j+1)2^{-n} = f^{-1}([j, j+1)/2^n)$, e $E_n = \{f(x)\ \geq\ n\}$.
Definimos $\begin{cases} \phi_n(x) = \frac{j}{2^n}\ se\ x\ \in\ E_{j,n} \\ \phi_n(x) = n\ se\ x\ \in\ E_n \end{cases}$.
Esta sequência verifica as propriedades solicitadas.

Para mostrar que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, basta observar que a P_{n+1} refina a P_n, dividindo cada intervalo de P_n em duas metades.
Como fica para as funções negativas? Como fazer para obter uma sequência decrescente, considerando f limitada? Sugerimos completar os detalhes como exercício.

Seja $f : (X, \boldsymbol{A}) \to \mathbb{R}$ mensurável. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções mensuráveis tal que:

1. $\phi_n \leq \phi_{n+1}$

2. $f(x) = lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$

3. ϕ_n só tem um número enumerável de valores .

4. $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f.

Para construir esta sequência, basta tomar a definição anterior, mas a partição das ordenadas será por infinitos intervalos da forma $[j, j+1)/2^n;\ j\ \in\ \mathbb{Z}$. Não é necessário substituir o conjunto E_n.
Se considerar $f\ \geq\ 0$, basta tomar $j\ \in\ \mathbb{N}$.

Função a valores complexos: se $F = f_1 + if_2$ for uma função a valores complexos F é mensurável se e somente se $f_1\ e\ f_2$ forem mensuráveis. É um exercício da lista.
Função a valores em $\bar{R}$: ela será mensurável se os conjuntos onde $A = \{f = +\infty\}$ e $B = \{f = -\infty\}$ forem mensuráveis e se a função g dada por
$g(x) = f(x),\ x\ \notin\ A \cup B\ e\ g(x) = 0,\ x\ \in\ A \cup B$. Observe que $A = \cap_n^{+\infty}\{x/\ f(x) > n\}$ e $B = \cap_n^{+\infty}\{x/\ f(x) < -n\}$