

### Lista 3 - Cálculo de integrais e de áreas

(I) Calcule:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^3 \sqrt{x} dx & \text{(b)} \int_1^e x^3 \ln x dx & \text{(c)} \int_{-1}^0 \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx \\
 \text{(d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \sqrt{3 + \cos x} dx & \text{(e)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx & \text{(f)} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx \\
 \text{(g)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx & \text{(h)} \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx & \text{(i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} 3x^2 dx
 \end{array}$$

(II) Em cada caso, calcule o valor da integral e esboce o gráfico da função integranda:

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \int_0^2 f(x) dx, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\
 \text{(b)} \int_{-1}^3 f(x) dx, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \\
 \text{(c)} \int_0^2 g(x) dx, \text{ onde } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2 + x^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

(III) Considere uma função  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  definida num intervalo simétrico em relação ao zero:

Dizemos que  $f$  é par se  $f(-t) = f(t)$ ,  $\forall t$ .

Dizemos que  $f$  é ímpar se  $f(-t) = -f(t)$ ,  $\forall t$ .

Por exemplo:  $f(t) = t^2$  é uma função par, pois  $(-t)^2 = t^2$ ;

a função  $f(t) = \operatorname{sen} t$  é uma função ímpar, pois  $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ .

Vamos relembrar os seguintes resultados:

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, então, para todo  $a > 0$ , vale que  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ .

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar, então, para todo  $a > 0$ , vale que  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .

$$\text{Calcule } \int_{-3}^3 \frac{x^5}{1 + x^{10}} dx \quad \text{e} \quad \int_{-2}^2 (x^2 - 3x^4 + \frac{1}{x^2 + 1}) dx$$

(IV) Em cada caso, esboce a região  $R$  e calcule a sua área:

- (1)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 3x + 1\}$
- (2)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq x^3 + 1\}$
- (3)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 9 - x^2\}$
- (4)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ e } -x \leq y \leq 2x + 1\}$
- (5)  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } \frac{1}{x^2} \leq y \leq 5 - 4x^2\}$
- (6)  $R$  é a região do plano limitada pelo eixo  $x$  e pelo gráfico da função  $f(x) = 3 - 2x - x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 2$
- (7)  $R$  é a região do plano limitada pelo gráfico da função  $y = \operatorname{sen} x$ , pelo gráfico de  $y = \cos x$  e pelas retas  $x = 0$  e  $x = \pi$ .