

**MAE 224 - PROBABILIDADE II**  
**Terceira Lista de Exercícios - Extra Classe**  
Monitor "João" Pedro M Saito

1) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias tais que  $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$  e  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ . Prove que  $X_n$  converge quase certamente para  $X$ , onde  $X$  é?

2) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo  $(\theta, \theta + 1)$ . Prove que  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$  converge quase certamente para  $\theta$ .

3) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que  $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$  e  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ . Defina  $Y_n = X_n \cdot X_{n+1}$  e prove que  $Y_n$  converge quase certamente

4) Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $(0, 1)$ . Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias definidas por

$$X_n = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{2} - X \right|^{k-1}.$$

Prove que  $X_n$  não converge quase certamente.