

04/09/2020

①

## Condições de contorno e teoremas de unicidade

Teorema 1: a solução da equação de Laplace fica determinada de forma unívoca num volume  $\mathcal{V}$  se o potencial for especificado na fronteira  $S$  de  $\mathcal{V}$ .

Prova:

Suponha que existam duas soluções distintas em  $\mathcal{V}$

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

ambas assumindo os mesmos valores em qualquer ponto de  $S$ .

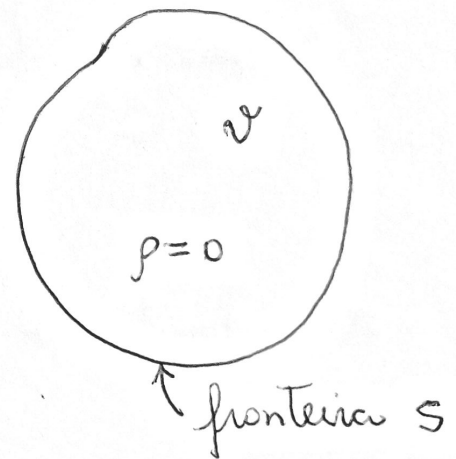
Se tomarmos a função diferença

$$V_3 = V_1 - V_2$$

ela também satisfaz a eq. de Laplace em  $\mathcal{V}$

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 (V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

e é nula em todos os pontos da fronteira  $S$ .



Como os mínimos e máximos de  $V_3$  estão todos sobre  $S$  (propriedade do valor médio), então seus valores máximos e mínimos são ambos iguais a zero e, portanto,  $V_3$  deve ser nula em todo o espaço.  $\square$  (2)

Dessa forma, se você encontrar uma solução da eq. de Laplace e ela satisfaz as condições de contorno do seu problema de interesse, tal solução é única para essas condições de contorno.

Um resultado análogo vale para a eq. de Poisson:

Assuma que existam duas soluções distintas em  $\mathcal{V}$

$$\nabla^2 V_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \nabla^2 V_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e que elas assumem os mesmos valores na fronteira  $S$

Então  $V_3 = V_1 - V_2$  satisfaz

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0 \Rightarrow V_3 \text{ satisfaz Laplace em } \mathcal{V}!$$

Além disso,  $V_3$  é nula em  $S$  e, portanto, deve ser nula em todo o espaço. (3)

Corolário: O potencial eletrostático num volume  $V$  fica univocamente determinado pela distribuição de cargas em  $V$  e pelas condições de contorno.

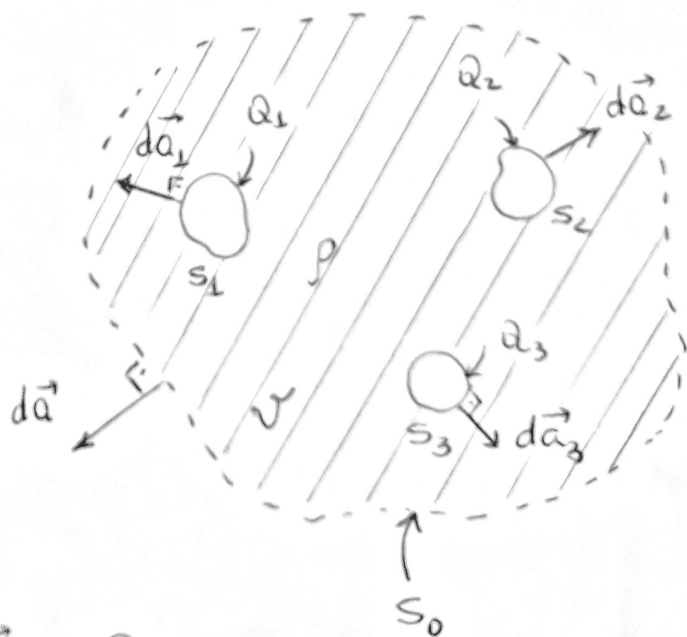
Teorema 2: O campo elétrico  $\vec{E}$  num volume  $V$  onde há condutores fica univocamente determinado se as cargas totais em cada condutor forem especificadas, bem como a densidade de carga no espaço entre os condutores.

Suponha  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  tais que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e para  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$



Como a fronteira  $S$  de  $\mathcal{V}$  é formada pela união (4)  
da superfície externa  $S_0$  (com vetor de área infinitesimal  $d\vec{a}_0$ ) com as superfícies internas  $S_i$  ( $i \geq 1$  e vetores de área infinitesimais  $-d\vec{a}_i$ )

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$$

pelo teorema da divergência

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0} \quad \left( \begin{array}{l} \text{carga no} \\ \text{volume} \\ \mathcal{V} \end{array} \right)$$

$$\oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2 \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0}$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} &= \oint_{S_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_0 - \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_i \\ &= \oint_{S_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_0 - \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\oint_{S_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_0 = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \oint_{S_0} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_0 = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

onde

$$Q_{\text{tot}} = Q_v + \sum_{i=1}^N Q_i$$

(5)

é a carga total dada pela soma das cargas superficiais  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  nos condutores com a carga de densidade  $\rho$  entre os condutores.

Para  $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ , temos na região entre os condutores

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1}_{= \rho/\epsilon_0} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2}_{= \rho/\epsilon_0} = 0$$

Além disso, na superfície de cada condutor

$$\oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_i = \underbrace{\oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_i}_{= Q_i/\epsilon_0} - \underbrace{\oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_i}_{= Q_i/\epsilon_0} = 0$$

Lembrando que

(6)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (V_3 \vec{E}_3) &= V_3 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 + \vec{E}_3 \cdot \underbrace{\vec{\nabla} V_3}_{=-\vec{E}_3} \\ &= -E_3^2\end{aligned}$$

Temos

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (V_3 \vec{E}_3) dz = \int_V V_3 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3}_{=0 \text{ em } V} dz - \int_V E_3^2 dz$$

Do teorema da divergência

$$\begin{aligned}\int_V \vec{\nabla} \cdot (V_3 \vec{E}_3) dz &= \oint_S V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} \\ &= \oint_{S_0} V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_0 - \sum_{i=1}^N V_{3_i} \oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_i\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos o fato de que as superfícies  $S_i$  dos condutores são equipotenciais.

A superfície  $S_0$  não precisa ser uma superfície física e pode ser tomada como estando no infinito onde  $V_3 \rightarrow 0$  e  $\vec{E}_3 \rightarrow \vec{0}$

(7)

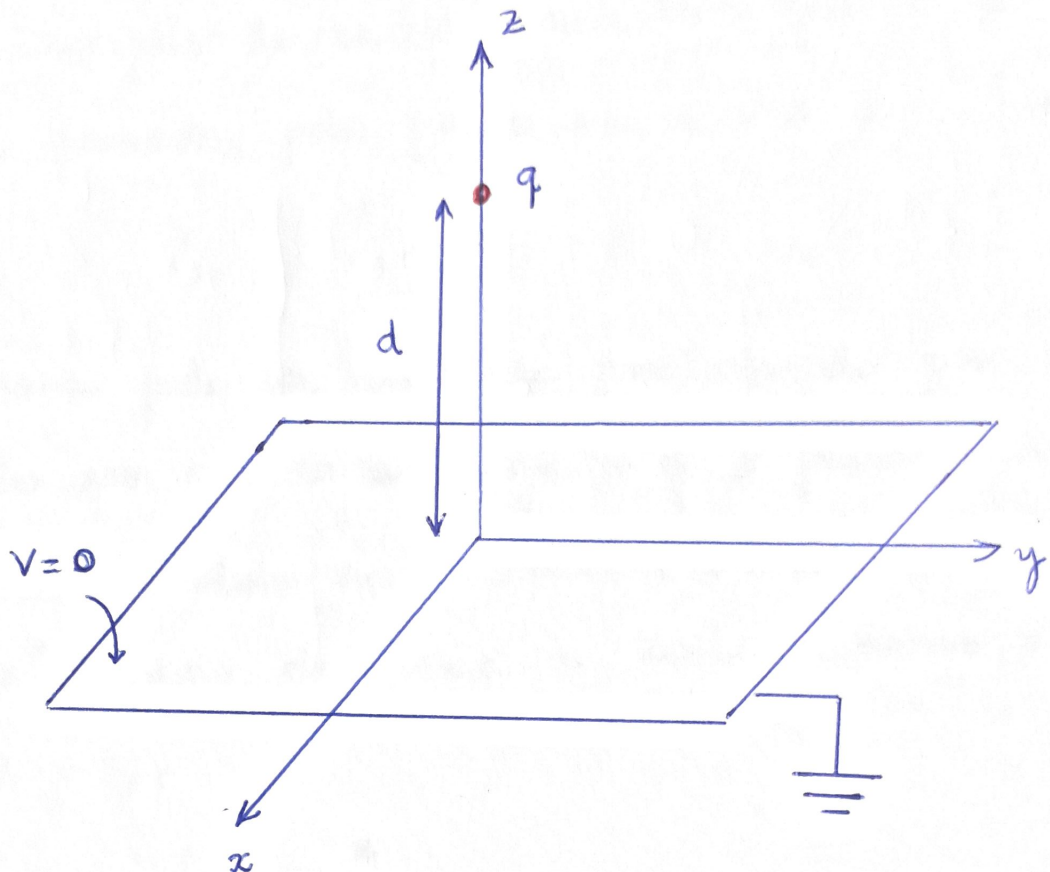
Portanto

$$\int_{\sigma} E_3^2 dz = \sum_{i=1}^N V_{3i} \underbrace{\oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_i}_{=0} = 0 \Rightarrow E_3 = 0$$

## Método das imagens

(8)

Carga pontual sobre plano condutor infinito e aterrado



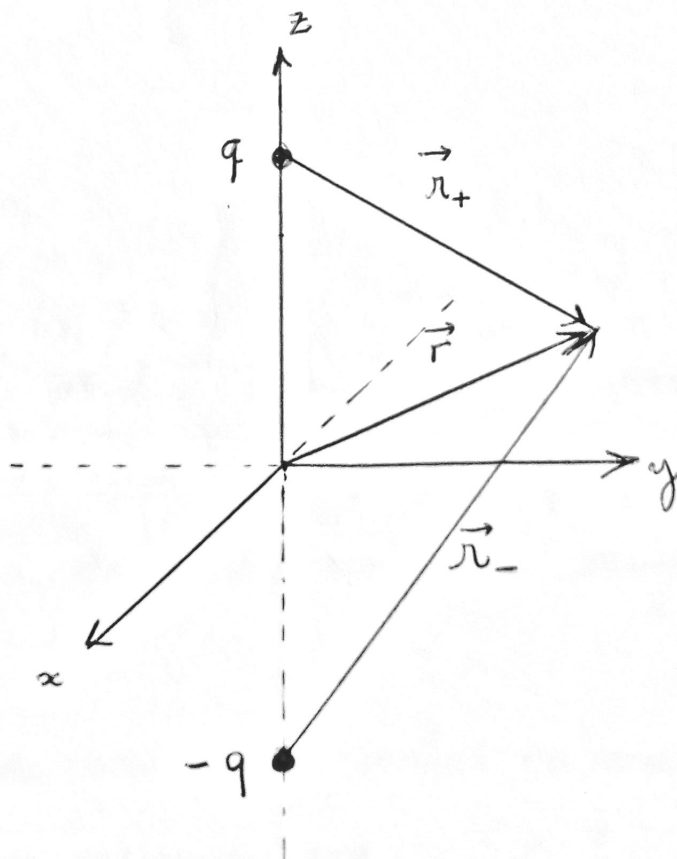
Nosso problema é determinar o potencial  $V$  na região  $z > 0$ . Na região  $z < 0$  o potencial é claramente nulo, já que satisfaz a eq. de Laplace nessa região e é nulo na fronteira formada pelo plano  $z=0$  e a superfície de um hemisfério no infinito.



9

Na região de interesse  $z > 0$ , o potencial deve satisfazer a eq. de Laplace em todos os pontos, com exceção de  $\vec{r} = d\hat{z}$ , onde é válida a eq. de Poisson. As condições de contorno são tais que  $V$  é nulo na fronteira formada pelo plano em  $z = 0$  e o hemisfério no infinito.

Esse problema pode ser resolvido analisando um problema físico distinto em que uma carga  $-q$  é posicionada simetricamente ao plano na posição  $\vec{r} = -d\hat{z}$  e o plano aterrado é eliminado de forma a conter apenas as cargas  $+q$  e  $-q$ .



O potencial eletrostático resultante desta configuração é

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-}$$

com

$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r} - d\hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + (z-d)\hat{z} \\ \vec{r}_- = \vec{r} + d\hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + (z+d)\hat{z} \end{cases}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{1/2}} \right\}$$

Portanto

$$V(z=0) = 0$$

e o potencial acima satisfaz as mesmas condições de contorno, bem como a mesma equação de Poisson que o potencial do nosso problema original na região  $z > 0$ .

Os teoremas de unicidade vistos anteriormente, garantem que eles são os mesmos em  $z > 0$ !

O campo elétrico na região  $z \geq 0$  é

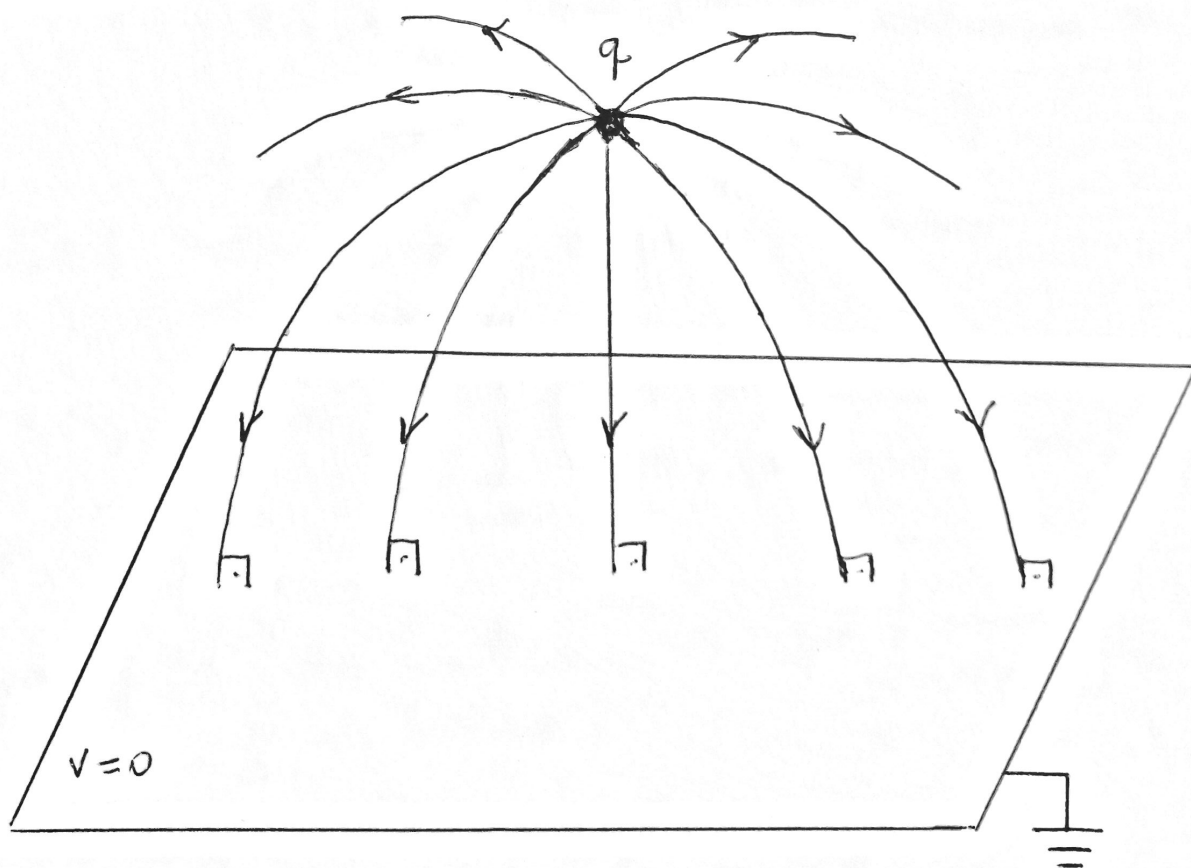
(11)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-[x\hat{x} + y\hat{y} + (z-d)\hat{z}]}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z+d)\hat{z}}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\}$$

Em particular, sobre o plano condutor

$$\vec{E}(z=0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Ou seja, o campo é perpendicular ao plano condutor como era de se esperar, já que este é uma superfície equipotencial.



A presença da carga q acima do plano condutor induz neste último uma densidade superficial de carga  $\sigma$  tal que

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Logo

$$-\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

Portanto

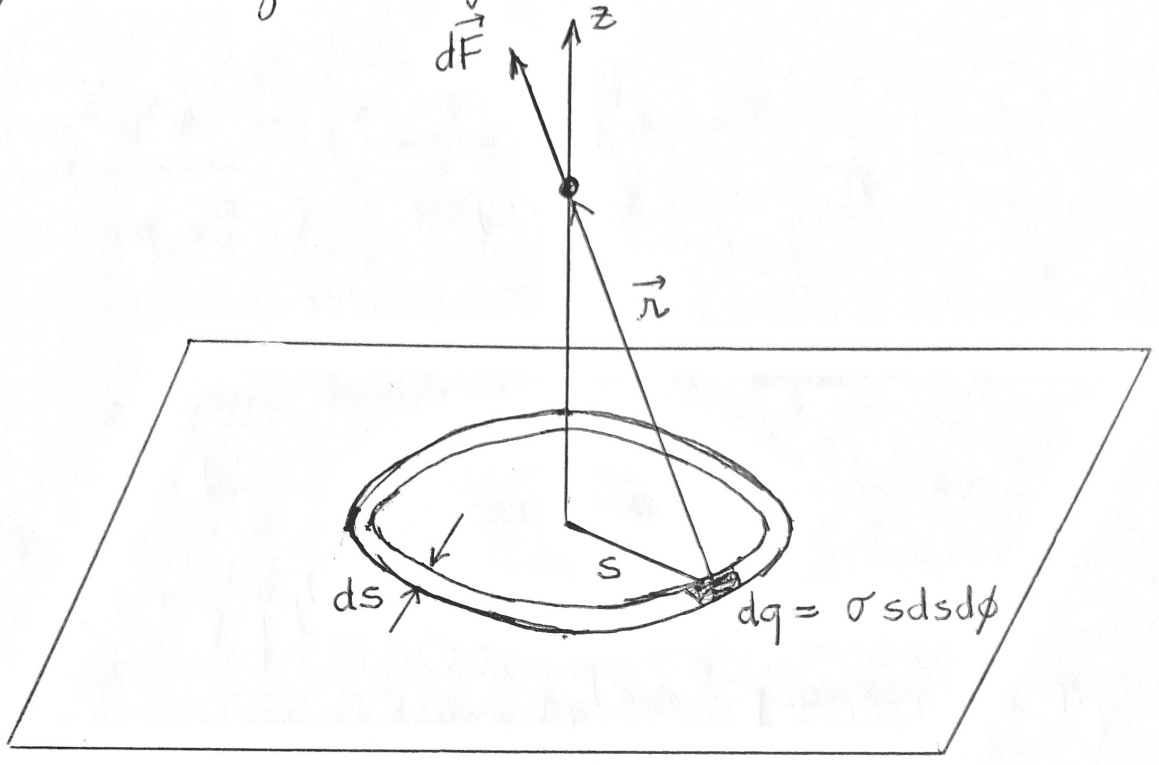
$$\sigma(x, y) = -\frac{qd}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

carga induzida tem sinal contrário ao de q

Carga total induzida sobre o plano condutor

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{plano}} \sigma(x, y) da = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{-qd}{2\pi} \right) \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{-qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} ds \frac{s}{(s^2 + d^2)^{3/2}} = -qd \int_0^{\infty} \frac{s}{(s^2 + d^2)^{3/2}} ds \\ &= -\frac{qd}{2} \int_{d^2}^{\infty} u^{-3/2} du = qd u^{-1/2} \Big|_{d^2}^{\infty} = -q \end{aligned}$$

A força total exercida sobre a carga q pela distribuição de carga induzida também pode ser obtida



$$d\vec{F} = q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} s ds d\phi$$

$$= \frac{q\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d\hat{z} - s\hat{s})}{(s^2 + d^2)^{3/2}} s ds d\phi$$

Então, após integração em  $\phi$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{qd}{2\epsilon_0} \hat{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(s^2 + d^2)^{3/2}} \left\{ \frac{-qd}{2\pi} \frac{1}{(s^2 + d^2)^{3/2}} \right\} s ds$$

$$\vec{F} = -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \hat{z} \int_0^\infty \frac{s}{(s^2 + d^2)^3} ds = -\frac{q^2 d^2 \hat{z}}{8\pi\epsilon_0} \int_{d^2}^\infty u^{-3} du \quad (14)$$

$$= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{\hat{z}}{d^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \hat{z}$$

Seja, a força total é igual àquela que uma carga  $-q$  em  $\vec{r} = -d\hat{z}$  exerceria sobre  $q$  em  $\vec{r} = d\hat{z}$ .

Já a energia eletrostática da configuração de cargas deve ser igual à energia mínima necessária para montar a configuração.

Essa energia é igual ao trabalho realizado por um agente externo para trazer a carga  $q$  a velocidade constante do infinito até a posição final  $\vec{r} = d\hat{z}$ .

Perceba que as cargas induzidas se movimentam a custo zero no plano durante o processo já que este é equipotencial  $v = 0$ .

Quando a carga  $q$  está a uma distância  $z$  acima do plano, a força exercida pelo plano sobre  $q$  é

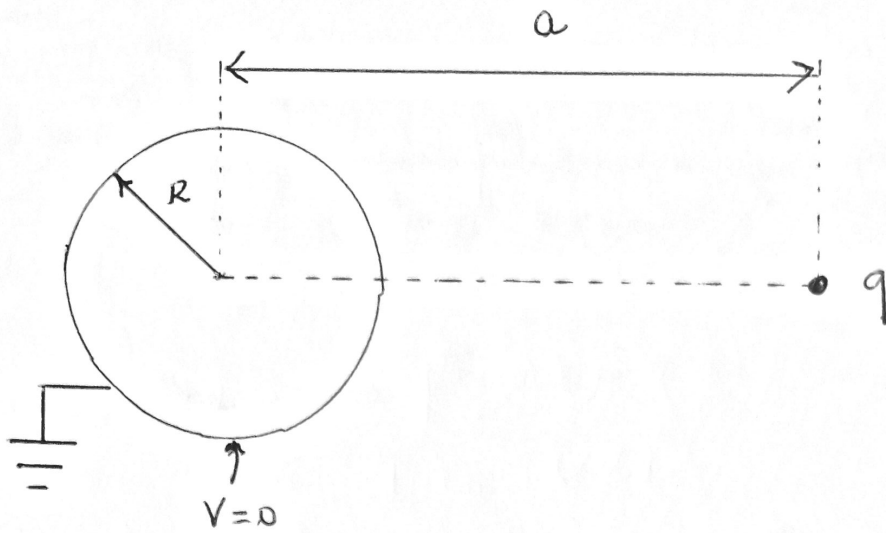
$$\vec{F}(z) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2z)^2} \hat{z}$$

Então

$$W = \int_{\infty}^d \underbrace{\vec{F}_{ext}}_{-\vec{F}} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{= dz \hat{z}} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d z^{-2} dz = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

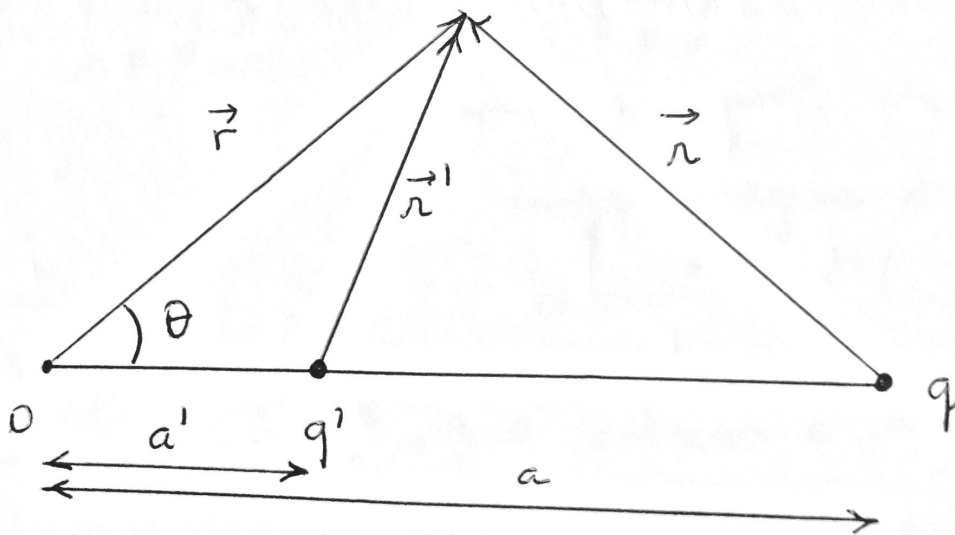
Já a energia eletrostática armazenada numa configuração de duas cargas =  $+q$  em  $\vec{r} = d\hat{z}$  e  $-q$  em  $\vec{r} = -d\hat{z}$  é

$$W' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} \Big|_{r=2d} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d} = 2W$$



O problema é determinar o potencial na região externa à casca esférica

Tomemos o problema físico abaixo



Potencial associado

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right\}$$

$$r^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta, \quad r'^2 = r^2 + a'^2 - 2ra' \cos\theta$$



Então

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + a'^2 - 2ra'\cos\theta)^{1/2}} \right\} \quad (17)$$

Em particular, para  $\vec{r} = R\hat{r}$

$$V(R\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(R^2 + a'^2 - 2Ra'\cos\theta)^{1/2}} \right\}$$

Dessa forma, é possível anular  $V$  sobre a superfície da casca, escolhendo  $q'$  e  $a'$

$$q' = -\left(\frac{R}{a}\right)q \quad \text{e} \quad a' = \underbrace{\left(\frac{R}{a}\right)R}_{< R}$$

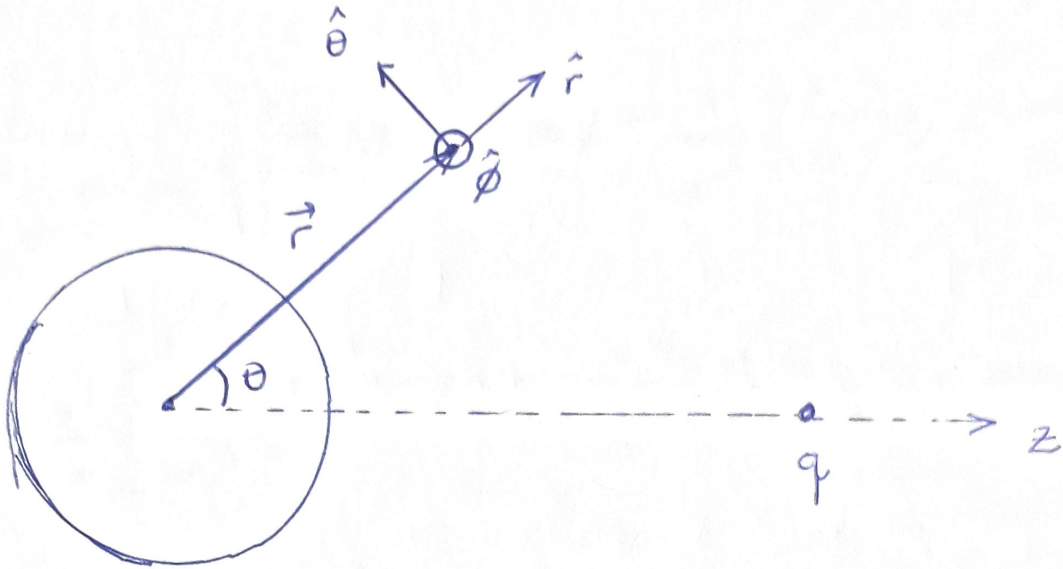
carga imagem dentro da casca

Sendo assim, na região  $r > R$  exterior à casca, este potencial e o do nosso problema original satisfazem às mesmas eqs. e as mesmas condições de contorno. Portanto,  $V(\vec{r})$  acima é a solução procurada!

# Campo elétrico

(18)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = - \left[ \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r'} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{q}{r^2} \frac{\partial r}{\partial r} - \frac{q'}{r'^2} \frac{\partial r'}{\partial r} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r}{\partial r} = \frac{r - a \cos \theta}{r}, \quad \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{r - a' \cos \theta}{r'}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r'} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{q}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{q'}{r'^2} \frac{\partial r'}{\partial \theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{r \sin \theta}{r} \quad \frac{\partial r'}{\partial \theta} = \frac{r a' \sin \theta}{r'}$$

(19)

Portanto

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{q}{r^3} (r - a \cos \theta) - \frac{1}{r'^3} \left( \frac{R}{a} \right) q (r - a' \cos \theta) \right] \hat{r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left[ \frac{q}{r^3} r \sin \theta - \frac{1}{r'^3} \left( \frac{R}{a} \right) q r a' \sin \theta \right] \hat{\theta} \right\} \\ &= E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

Em  $\vec{r} = R \hat{r}$ , ou seja, sobre a superfície da esfera aterrada,

$$E_\theta = 0 \quad (\text{mostrar!})$$

e o campo é puramente radial

$$\begin{aligned} \vec{E}(R \hat{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right] R}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \hat{r} \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[ \left( \frac{a}{R} \right)^2 - 1 \right] R}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \hat{r} \end{aligned}$$

Dentro da casca o campo é nulo, já que o potencial satisfaz a eq. de Laplace e se anula na fronteira.

(20)

Portanto a densidade superficial de carga induzida é

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi} \frac{\left[\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1\right] R}{\left(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{3/2}} < 0$$

Carga total induzida

$$Q = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$= +2\pi R^2 \left(\frac{q}{4\pi}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right] R \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\left(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{3/2}} d\theta$$

$$= \frac{R^3 q}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right] \frac{1}{2Ra} \int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} u^{-3/2} du$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\left(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{3/2}} \quad \leftarrow u \Rightarrow du = 2Ra\sin\theta d\theta$

$$= \frac{qR^2}{4a} \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right] \left[-2u^{-1/2}\right]_{(R-a)^2}^{(R+a)^2}$$

$$= -\frac{qR}{2a} \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2\right] \left\{ \frac{1}{R+a} + \frac{1}{R-a} \right\} = -q$$