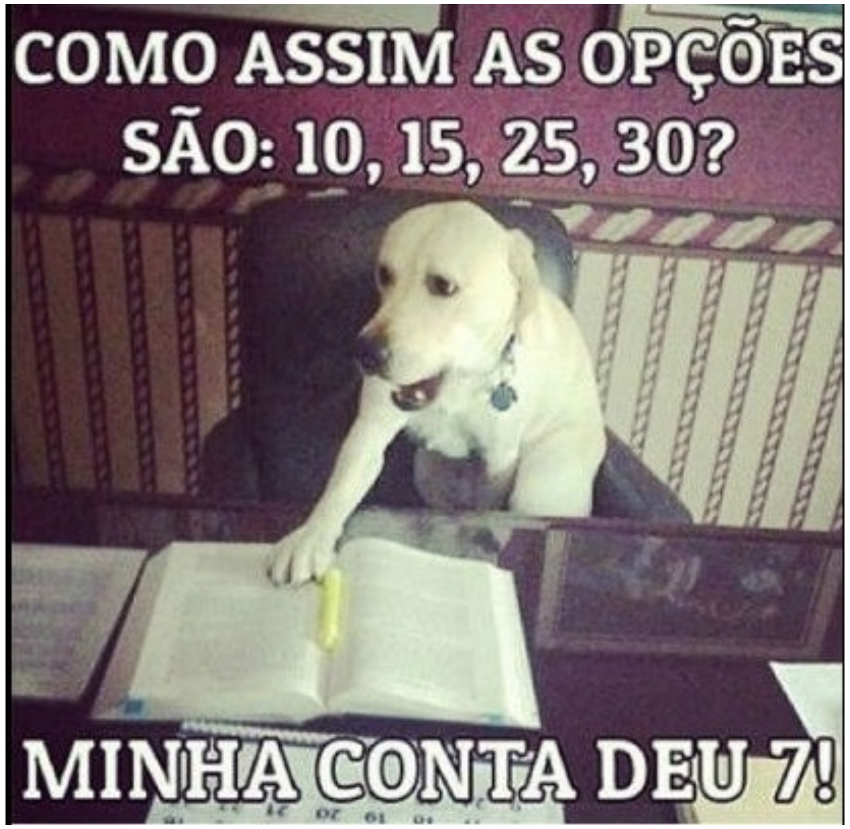
Mecânica (IGc) - 4310192: Revisão para a Prova P1

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo



Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 21 de Setembro de 2020

Exercício 1: Partícula com velocidade radial

- **Uma partícula se movimenta em um plano com velocidade radial constante igual à $v_r = dr/dt = 4\,m/s$, começando na origem. A velocidade angular é constante e tem valor $d\theta/dt = 2\,rad/s$. Quando a partícula está a 3 m da origem, determine o módulo (a) de sua VELOCIDADE**

$$r(t) = \cancel{r(0)} + \int_0^t \frac{dr}{dt'}\,dt' = \int_0^t 4\,dt' = 4\,t$$

$$\theta(t) = \cancel{\theta(0)} + \int_0^t \frac{d\theta}{dt'}\,dt' = \int_0^t 2\,dt' = 2\,t$$

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) = 4\,t\cos(2\,t)$$

$$r(t) = 4\,t = 3\,m \quad \rightarrow \quad t = \frac{3}{4}\,s$$

$$y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}\theta(t) = 4\,t\,\mathrm{sen}(2\,t)$$

$$v_x\left(t = \frac{3}{4}\right) = 4\cos\left(2\,\frac{3}{4}\right) - 8\,\frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\left(2\,\frac{3}{4}\right) = -5{,}7$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 4\cos(2\,t) - 8\,t\,\mathrm{sen}(2\,t)$$

$$v_y\left(t = \frac{3}{4}\right) = 4\,\mathrm{sen}\left(2\,\frac{3}{4}\right) + 8\,\frac{3}{4}\cos\left(2\,\frac{3}{4}\right) = +4{,}1$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 4\,\mathrm{sen}(2\,t) + 8\,t\cos(2\,t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7{,}2\,m/s$$

Exercício 1: Partícula com velocidade radial

- **Uma partícula se movimenta em um plano com velocidade radial constante igual à $v_r = dr/dt = 4\,m/s$, começando na origem. A velocidade angular é constante e tem valor $d\theta/dt = 2\,rad/s$. Quando a partícula está a 3 m da origem, determine o módulo (b) de sua ACELERAÇÃO**

$$v_x(t) = 4\cos(2\,t) - 8\,t\,\mathrm{sen}(2\,t) \quad \rightarrow \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -\,16\,\mathrm{sen}(2\,t) - 16\,t\cos(2\,t)$$

$$v_y(t) = 4\,\mathrm{sen}(2\,t) + 8\,t\cos(2\,t) \quad \rightarrow \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 16\cos(2\,t) - 16\,t\,\mathrm{sen}(2\,t)$$

$$a_x\left(t = \frac{3}{4}\right) = -\,16\,\mathrm{sen}\left(2\,\frac{3}{4}\right) - 16\,t\cos\left(2\,\frac{3}{4}\right) = -\,16{,}8$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 20\,m/s^2$$

$$a_y\left(t = \frac{3}{4}\right) = 16\cos\left(2\,\frac{3}{4}\right) - 16\,t\,\mathrm{sen}\left(2\,\frac{3}{4}\right) = -\,16{,}8$$

Exercício 2: Pedra lançada de um prédio

- **Uma pedra é lançada do alto de um prédio com um ângulo de 30 graus com a horizontal e com uma velocidade escalar inicial de 20 m/s. Se a altura do prédio é de 45 m, (a) por quanto tempo a pedra permanece em voo?**

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(0) = 20\cos(30^\circ)\,\hat{\mathbf{i}} + 20\sin(30^\circ)\,\hat{\mathbf{j}} = 17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + 10\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{a}} = (-9{,}8\,m/s^2)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(0) + \int_0^t \overrightarrow{\mathbf{a}}(t')\,dt' = 17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + 10\,\hat{\mathbf{j}} - \int_0^t 9{,}8\,\hat{\mathbf{j}}\,dt' = 17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + (10 - 9{,}8\,t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{r}}(0) + \int_0^t \overrightarrow{\mathbf{v}}(t')\,dt' = 45\,\hat{\mathbf{j}} + \int_0^t \left[17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + (10 - 9{,}8\,t')\,\hat{\mathbf{j}}\right]\,dt' = 17{,}3\,t\,\hat{\mathbf{i}} + (45 + 10\,t - 4{,}9\,t^2)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$45 + 10\,t - 4{,}9\,t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = -\,2{,}2 \text{ ou } t = 4{,}2 \quad \text{Resultado :} \quad t = 4{,}2\,s$$

Exercício 2: Pedra lançada de um prédio

- **Uma pedra é lançada do alto de um prédio com um ângulo de 30 graus com a horizontal e com uma velocidade escalar inicial de 20 m/s. Se a altura do prédio é de 45 m, (b) qual é o vetor velocidade da pedra exatamente antes de alcançar o solo e qual é o seu ângulo formado com a horizontal?**

$$\vec{\mathbf{v}}(t = 4{,}2) = 17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + (10 - 9{,}8 \times 4{,}2)\,\hat{\mathbf{j}} = 17{,}3\,\hat{\mathbf{i}} - 31{,}4\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$v(4{,}2) = \sqrt{17{,}3^2 + (-31{,}4)^2} = 35{,}8\,m/s$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-31{,}4}{17{,}3} = -\,61^\circ$$

Exercício 2: Pedra lançada de um prédio

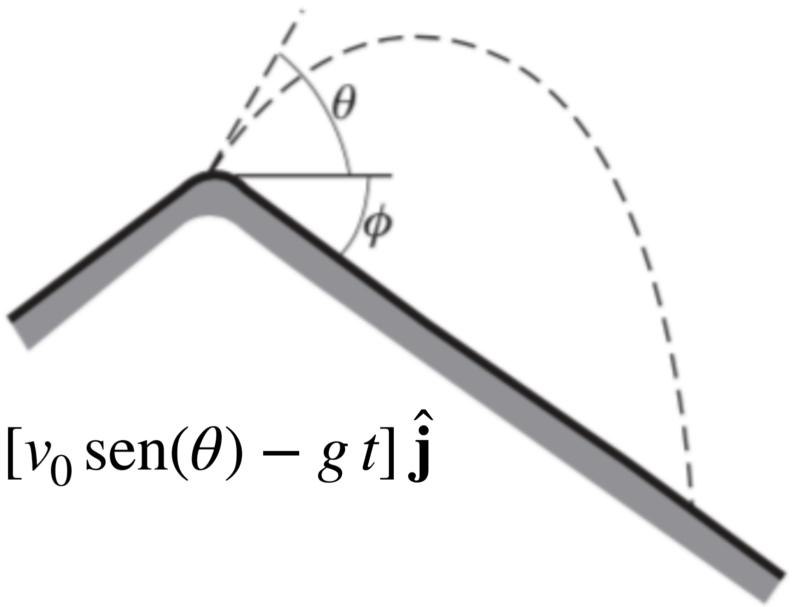
- **Uma pedra é lançada do alto de um prédio com um ângulo de 30 graus com a horizontal e com uma velocidade escalar inicial de 20 m/s. Se a altura do prédio é de 45 m, (c) onde a pedra alcança o solo?**

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = 17{,}3\, t\, \hat{\mathbf{i}} + (45 + 10\, t - 4{,}9\, t^2)\, \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(4{,}2) = 17{,}3 \times 4{,}2\, \hat{\mathbf{i}} + (45 + 10 \times 4{,}2 - 4{,}9 \times 4{,}2^2)\, \hat{\mathbf{j}} = 73\, \hat{\mathbf{i}} + 0\, \hat{\mathbf{j}} \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{r}}(4{,}2) = 73\, \hat{\mathbf{i}}$$

Exercício 3: Pedra no topo de uma montanha

- **Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?**



$$\vec{\mathbf{v}}(0) = v_0 \cos\theta \, \hat{\mathbf{i}} + v_0 \,\text{sen}\theta \, \hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{\mathbf{a}} = -g \, \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{pedra} = \vec{\mathbf{v}}(0) + \int_0^t \vec{\mathbf{a}}(t')\, dt' = \vec{\mathbf{v}}(0) - \int_0^t g\, \hat{\mathbf{j}}\, dt' = v_0 \cos(\theta)\, \hat{\mathbf{i}} + [v_0 \,\text{sen}(\theta) - g\, t]\, \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{pedra} = \cancel{\vec{\mathbf{r}}(0)} + \int_0^t \vec{\mathbf{v}}(t')\, dt' = v_0\, t \cos(\theta)\, \hat{\mathbf{i}} + \left[v_0\, t \,\text{sen}(\theta) - \frac{g}{2} t^2 \right] \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{rampa} = D \cos(\phi)\, \hat{\mathbf{i}} - D \,\text{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}}$$

Exercício 3: Pedra no topo de uma montanha

- **Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?**

$$\vec{\mathbf{r}}_{pedra} = v_0\, t \cos(\theta)\, \hat{\mathbf{i}} + \left[v_0\, t\, \mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2} t^2 \right] \hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{\mathbf{r}}_{rampa} = D \cos(\phi)\, \hat{\mathbf{i}} - D\, \mathrm{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{rampa} = \vec{\mathbf{r}}_{pedra} \quad \rightarrow \quad D \cos(\phi)\, \hat{\mathbf{i}} - D\, \mathrm{sen}(\phi) \hat{\mathbf{j}} = v_0\, t \cos(\theta)\, \hat{\mathbf{i}} + \left[v_0\, t\, \mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2} t^2 \right] \hat{\mathbf{j}}$$

$$D \cos(\phi) = v_0\, t \cos(\theta) \quad \rightarrow \quad t = \frac{D \cos(\phi)}{v_0 \cos(\theta)}$$

$$-D\, \mathrm{sen}(\phi) = v_0\, t\, \mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2} t^2 \quad \rightarrow \quad -D\, \mathrm{sen}(\phi) = v_0 \left[\frac{D \cos(\phi)}{v_0 \cos(\theta)} \right] \mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2} \left[\frac{D \cos(\phi)}{v_0 \cos(\theta)} \right]^2$$

Exercício 3: Pedra no topo de uma montanha

- **Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?**

$$-D\,\mathrm{sen}(\phi) = v_0\, t\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2}\,t^2 \quad \rightarrow \quad -D\,\mathrm{sen}(\phi) = v_0 \left[\frac{D\cos(\phi)}{v_0\cos(\theta)}\right] \mathrm{sen}(\theta) - \frac{g}{2}\left[\frac{D\cos(\phi)}{v_0\cos(\theta)}\right]^2$$

$$-\,\mathrm{sen}(\phi) = \cos(\phi)\tan(\theta) - \frac{D\,g\cos^2(\phi)}{2\,v_0^2\cos^2(\theta)}$$

$$-2\,v_0^2\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) = 2\,v_0^2\cos^2(\theta)\cos(\phi)\tan(\theta) - D\,g\cos^2(\phi)$$

$$2\,v_0^2\cos^2(\theta)\left[\mathrm{sen}(\phi) + \cos(\phi)\tan(\theta)\right] = D\,g\cos^2(\phi) \quad \rightarrow \quad D = \frac{2\,v_0^2\cos^2(\theta)\left[\mathrm{sen}(\phi) + \cos(\phi)\tan(\theta)\right]}{g\cos^2(\phi)}$$

Exercício 3: Pedra no topo de uma montanha

- **Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?**

$$D(\theta) = \frac{2\, v_0^2 \cos^2(\theta) \left[\mathrm{sen}(\phi) + \cos(\phi) \tan(\theta)\right]}{g \cos^2(\phi)}$$

$$\frac{dD}{d\theta} = -\frac{4\, v_0^2 \cos(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta) \left[\mathrm{sen}(\phi) + \cos(\phi) \tan(\theta)\right]}{g \cos^2(\phi)} + \frac{2\, v_0^2}{g \cos(\phi)} = 0$$

$$2 \cos(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta) \left[\tan(\phi) + \tan(\theta)\right] = \frac{1}{2 \cos(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta)} \quad \rightarrow \quad \tan(\phi) = \frac{1 - 2\, \mathrm{sen}^2(\theta)}{2 \cos(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta)} = \frac{1}{\tan(2\,\theta)}$$

$$\tan(2\,\theta) = \frac{1}{\tan(\phi)} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan\left[\frac{1}{\tan(\phi)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$