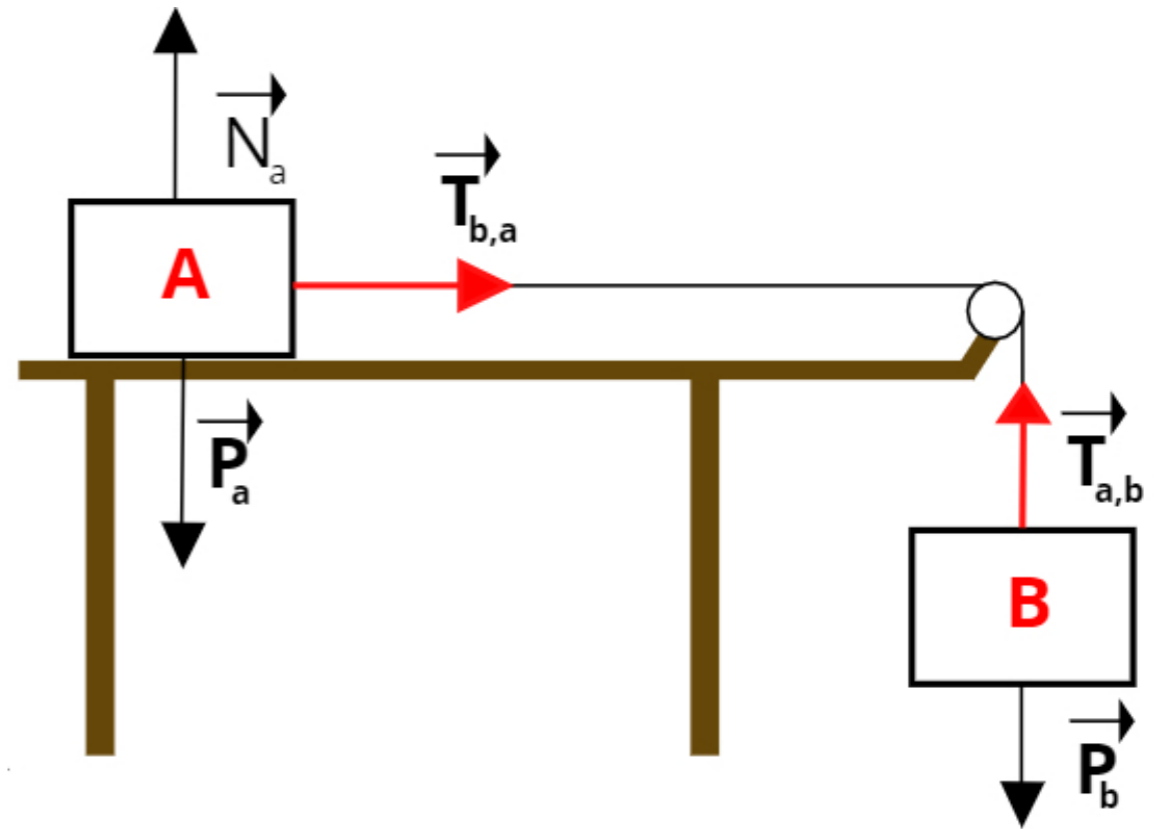


# Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por  
**Prof. Gustavo Paganini Canal**  
Departamento de Física Aplicada  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo



Diagramas de corpo livre

Curso ministrado online para o  
**Instituto de Geociências**

e-mail: [canal@if.usp.br](mailto:canal@if.usp.br)

São Paulo - SP, 14 de Setembro de 2020

# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Diagrama de corpo livre**
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- **Exercícios de Fixação**

# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Diagrama de corpo livre**
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- **Exercícios de Fixação**

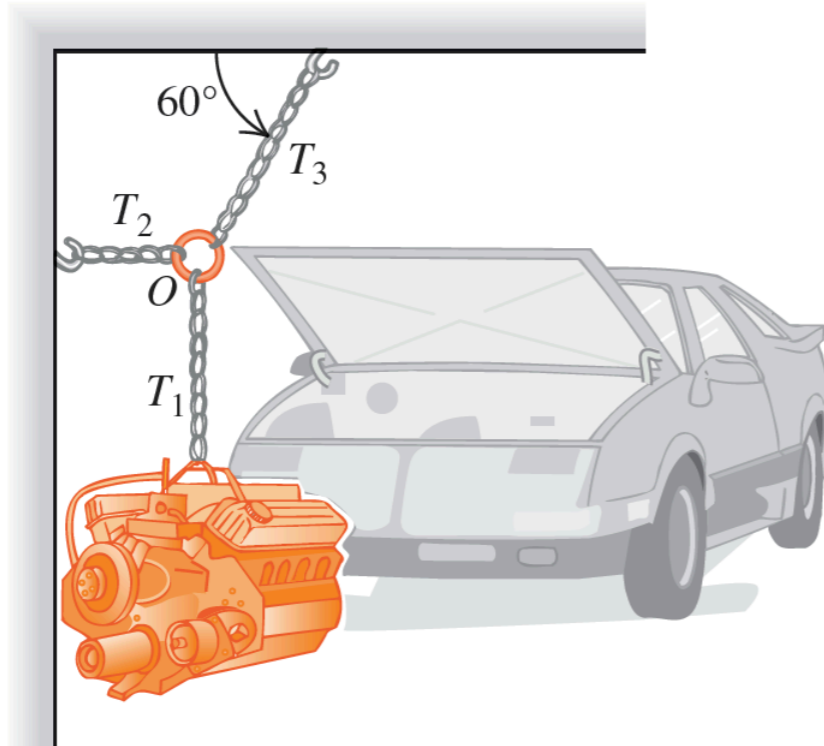
# Diagramas do corpo livre são essenciais para ajudar a identificar as forças relevantes e, portanto, a dinâmica do corpo

- **A primeira e a segunda lei de Newton se aplicam a um corpo específico**
  - Ao usar a primeira lei de Newton,  $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = 0$ , para uma situação de equilíbrio, ou a segunda lei de Newton,  $\Sigma \vec{\mathbf{F}} = m \vec{\mathbf{a}}$ , para uma situação sem equilíbrio, deve-se definir, logo de início, qual é o corpo de interesse
- **Só as forças que atuam sobre o corpo de interesse importam**
  - Depois de escolher o corpo a ser analisado, deve-se identificar todas as forças que atuam sobre ele
  - NÃO CONFUNDA as forças que atuam sobre esse corpo com as forças exercidas por ele sobre outros corpos
  - Por exemplo, para analisar uma pessoa caminhando, deve-se incluir em  $\Sigma \vec{\mathbf{F}}$  a força que o solo exerce sobre a pessoa enquanto ela caminha, mas não a força que a pessoa exerce sobre o solo

# Diagramas do corpo livre são essenciais para ajudar a identificar as forças relevantes e, portanto, a dinâmica do corpo

- Um diagrama de corpo livre é um diagrama que mostra o corpo escolhido "livre" de suas vizinhanças
  - Quando o problema envolve mais de um corpo, deve-se separar os corpos e desenhar um diagrama do corpo livre para cada um

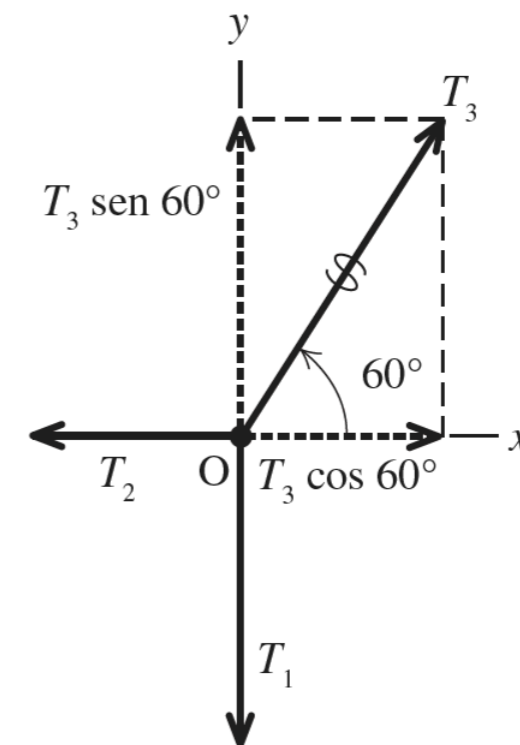
(a) Motor, correntes e anel



(b) Diagrama do corpo livre para o motor



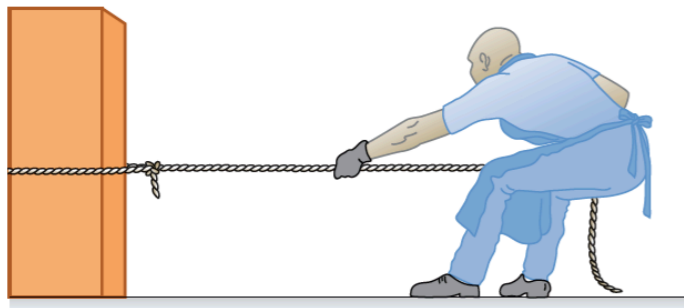
(c) Diagrama do corpo livre para o anel O



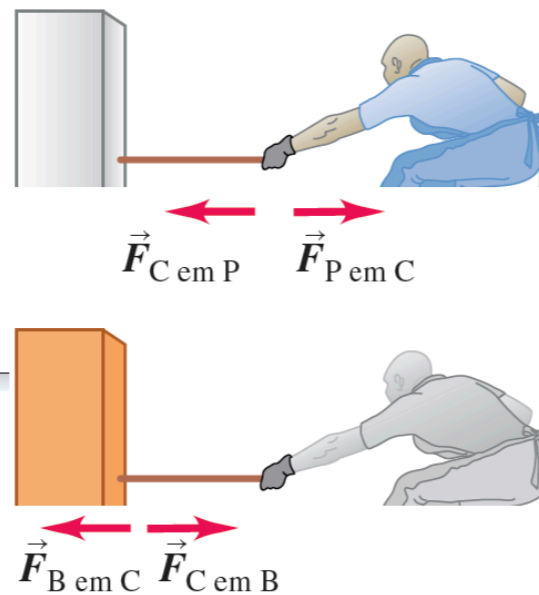
# Diagramas do corpo livre são essenciais para ajudar a identificar as forças relevantes e, portanto, a dinâmica do corpo

- Quando o problema envolve mais de um corpo, deve-se separar os corpos e desenhar um diagrama do corpo livre para cada um

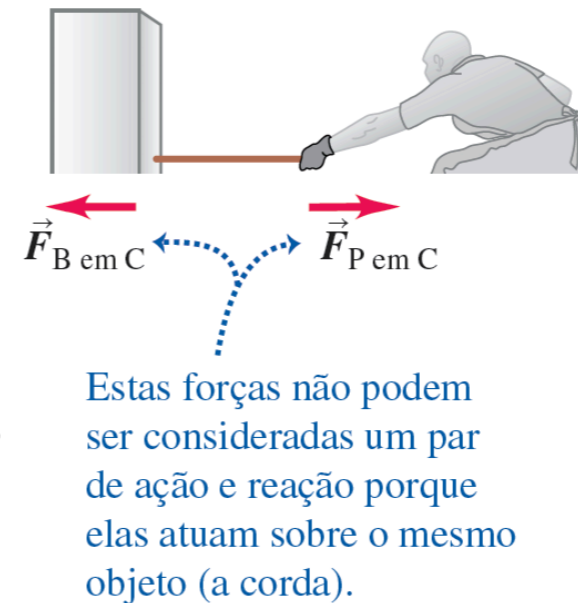
(a) O bloco, a corda e o pedreiro



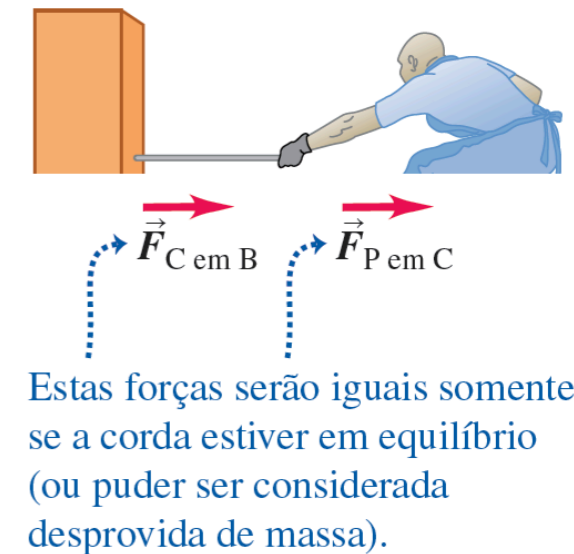
(b) Os pares de ação e reação



(c) Não são pares de ação e reação

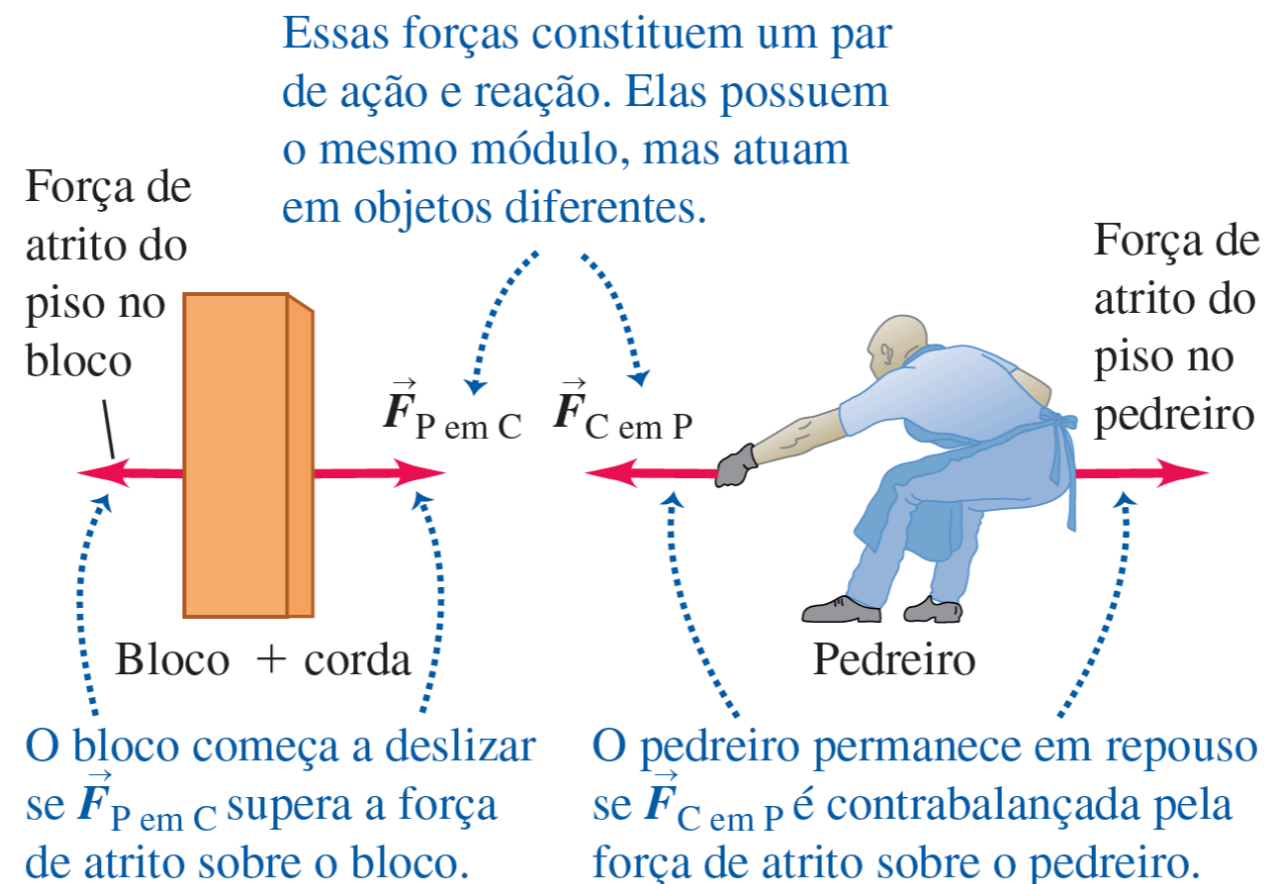


(d) Não necessariamente iguais



# Diagramas do corpo livre são essenciais para ajudar a identificar as forças relevantes e, portanto, a dinâmica do corpo

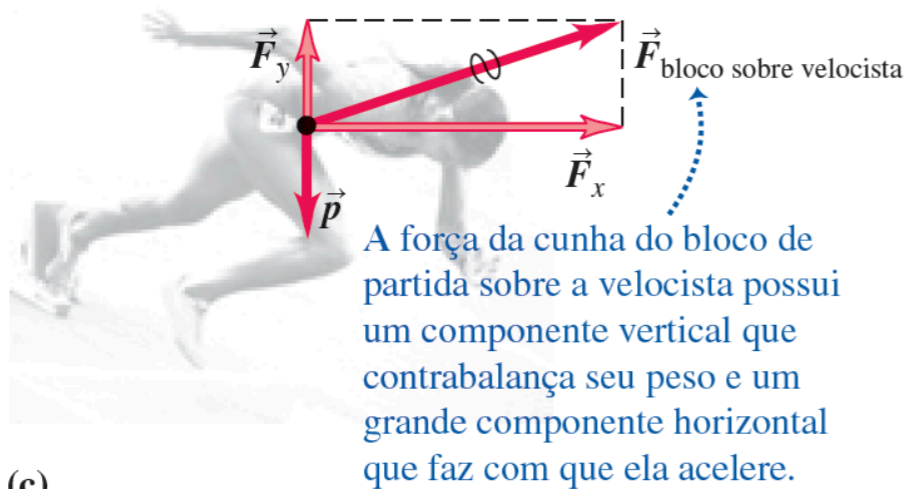
- Quando o problema envolve mais de um corpo, deve-se separar os corpos e desenhar um diagrama do corpo livre para cada um



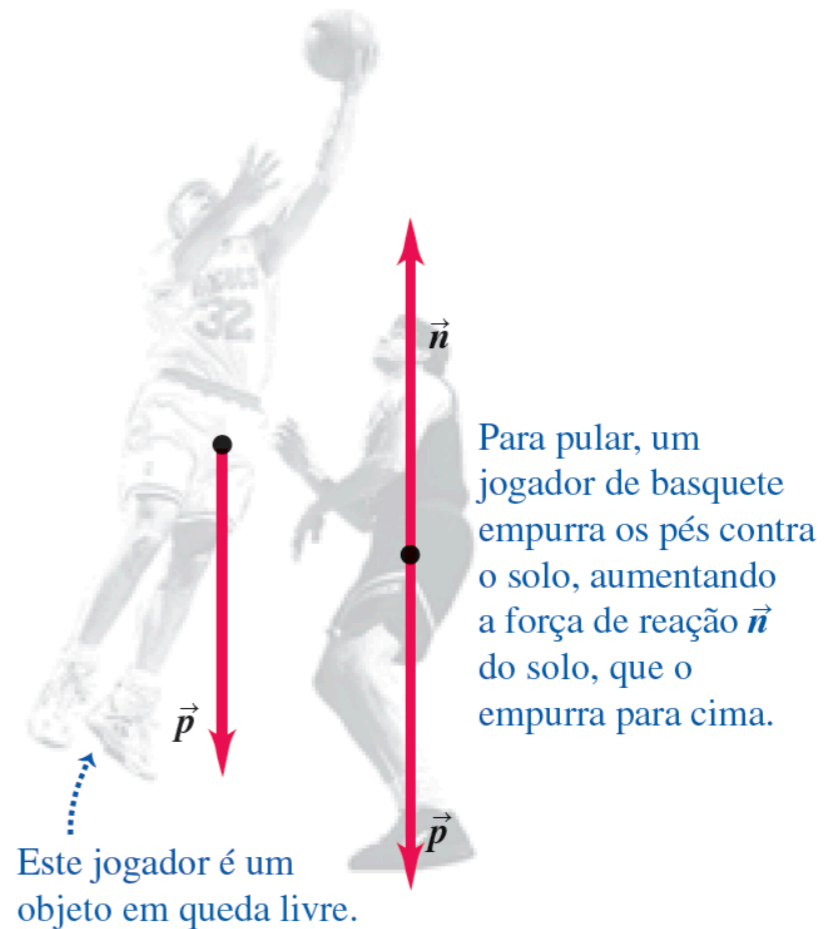
*Note que este diagrama de forças não pode ser considerado um diagrama de corpo livre, pois não estão presentes todas as forças (faltam peso e normal)*

# Exemplos de diagramas do corpo livre

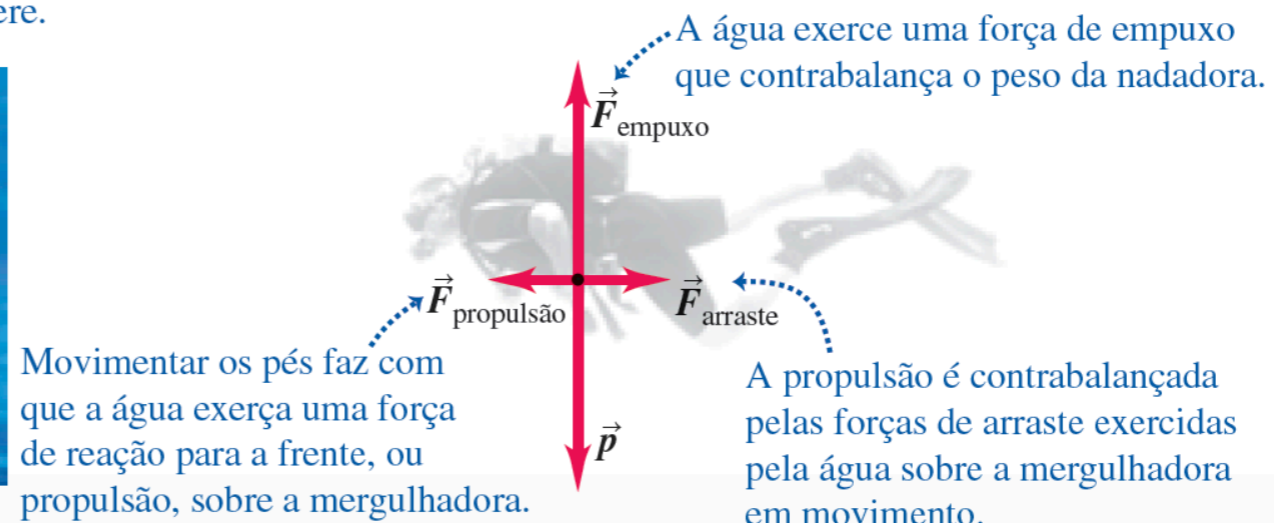
(a)



(b)



(c)





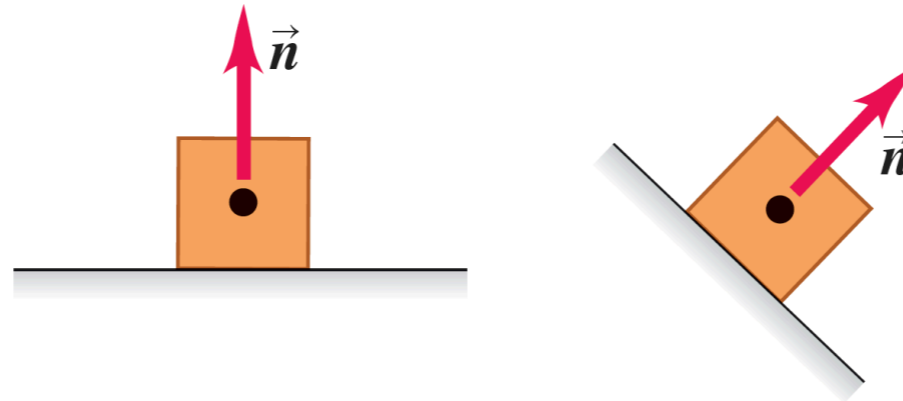
# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Diagrama de corpo livre
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- Exercícios de Fixação

# A força normal é uma força de contato

- A força normal que atua sobre um objeto é sempre perpendicular à superfície com a qual o corpo esteja em contato

(a) **Força normal  $\vec{n}$ :** quando um objeto repousa sobre uma superfície ou a empurra, a superfície exerce uma força sobre ele, orientada perpendicularmente à superfície.



**ATENÇÃO** Força normal e peso podem não ser iguais. Trata-se de um erro comum supor, automaticamente, que o módulo  $n$  da força normal é igual ao peso  $p$ . Mas nosso resultado mostra que, em geral, isso *não* é verdadeiro. É sempre recomendável tratar  $n$  como uma variável e solucionar seu valor, como fizemos aqui.

# Exemplo: dinâmica de uma caixa sujeita à uma força

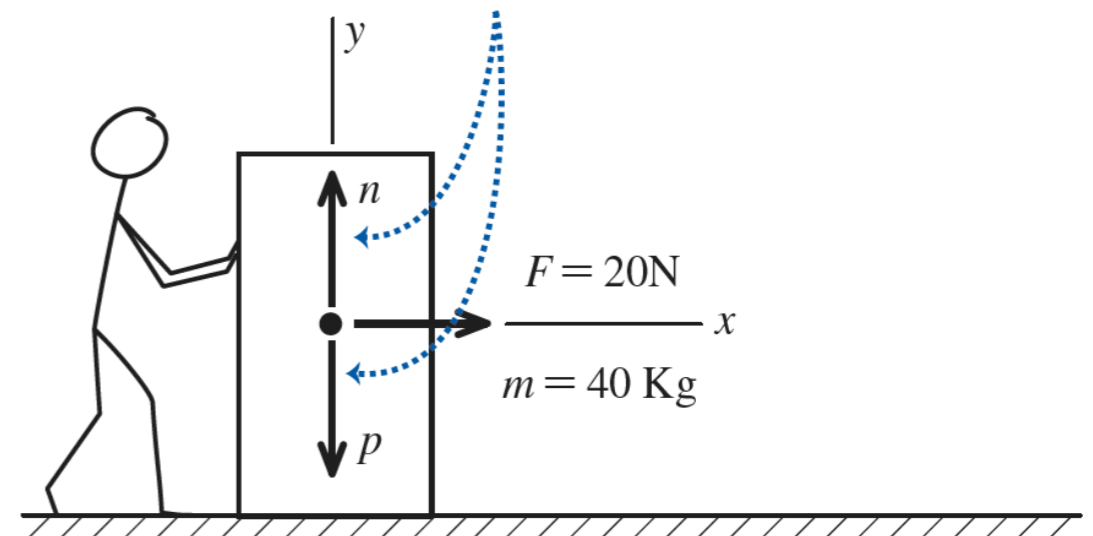
- Um trabalhador aplica uma força horizontal constante de módulo igual a 20 N sobre uma caixa de massa igual a 40 kg que está em repouso sobre uma superfície horizontal com atrito desprezável. Qual é a aceleração da caixa?
  - As forças que atuam sobre a caixa são:
    - + A força horizontal aplicada
    - + O peso
    - + A normal

$$\Sigma \vec{F} = \vec{n} + \vec{p} + \vec{F}_a$$

$$\Sigma F_y = n - p = 0 \quad \rightarrow \quad n = p = m g$$

$$\Sigma F_x = F = m a_x \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{F}{m} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

A caixa não possui aceleração vertical; portanto, a soma dos componentes verticais da força resultante é igual a zero. No entanto, para maior clareza, mostramos as forças verticais atuando sobre a caixa.



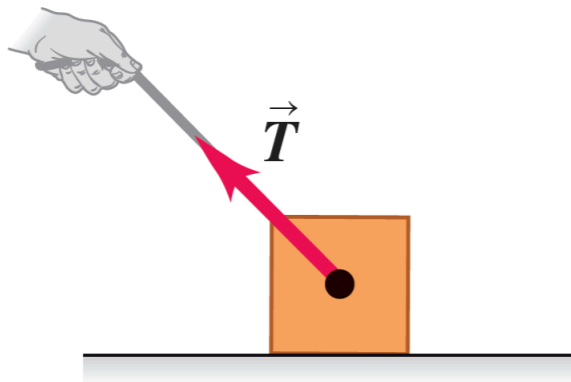
# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Diagrama de corpo livre
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- Exercícios de Fixação

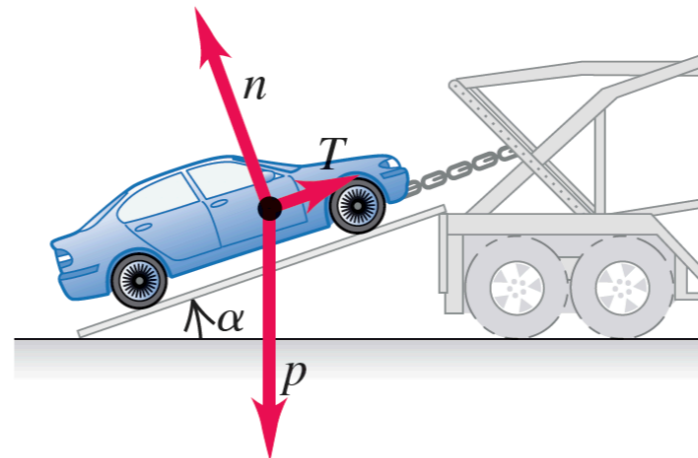
# A tensão (ou tração) também é uma força de contato

- A força que uma corda esticada exerce sobre um objeto ao qual ela está presa é chamada de força de tensão (ou tração)

(c) **Força de tensão  $\vec{T}$** : uma força de puxar exercida sobre um objeto por uma corda, um cabo etc.

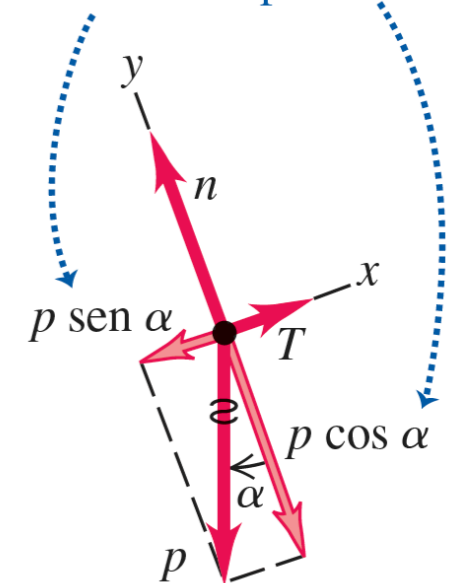


(a) Carro sobre a rampa



(b) Diagrama do corpo livre para o carro

Substituímos o peso pelos seus componentes.



# Exemplo: pêndulo cônico

- Um pêndulo é formado por um peso de massa  $m$  na extremidade de um fio de comprimento  $L$ . Em vez de oscilar para a frente e para trás, o peso se move em um círculo horizontal com velocidade escalar constante  $v$ , e o fio faz um ângulo  $\beta$  constante com a direção vertical. Ache a tensão  $F$  no fio e o período  $T$  (o tempo para uma rotação da bola)

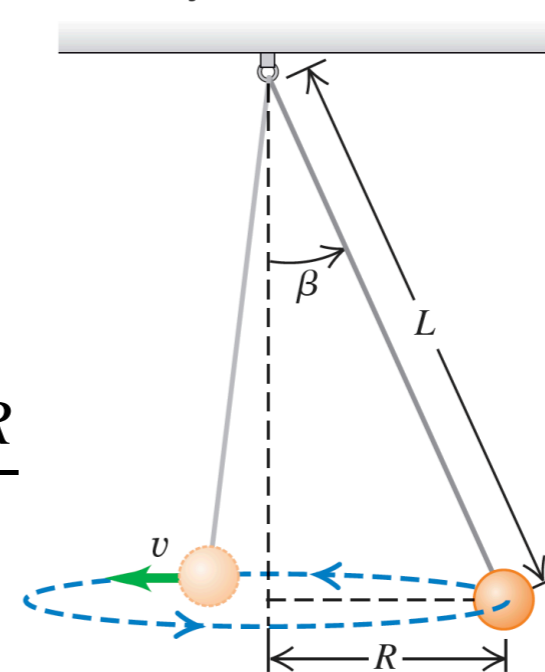
$$\Sigma F_y = F \cos \beta - m g = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{m g}{\cos \beta}$$

$$\Sigma F_x = F \sin \beta = m a_{rad} \quad \rightarrow \quad a_{rad} = \frac{F \sin \beta}{m}$$

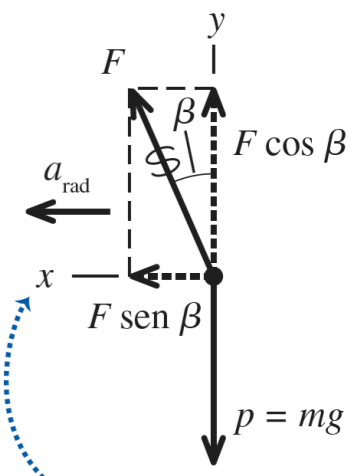
$$a_{rad} = g \tan \beta \quad \rightarrow \quad a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{(2\pi R)^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R}{a_{rad}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \beta}{g}}$$

(a) A situação



(b) Diagrama do corpo livre para a bola



Orientamos o sentido positivo do eixo  $x$  para o centro do círculo.

# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Diagrama de corpo livre
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- Exercícios de Fixação

# A força de atrito depende fortemente das características geométricas dos corpos em contato

- **A força de atrito, decorrente do contato entre dois corpos sólidos, é sempre tangencial à superfície de contato**
  - *Esta lei foi formulada por Amontons e Coulomb no século XVIII*
- **O fenômeno é extremamente complicado e depende fortemente da natureza dos materiais e do estado das superfícies em contato: grau de polimento, oxidação, presença ou não de camadas fluídas (água, lubrificantes)**



# Características da força de atrito estático

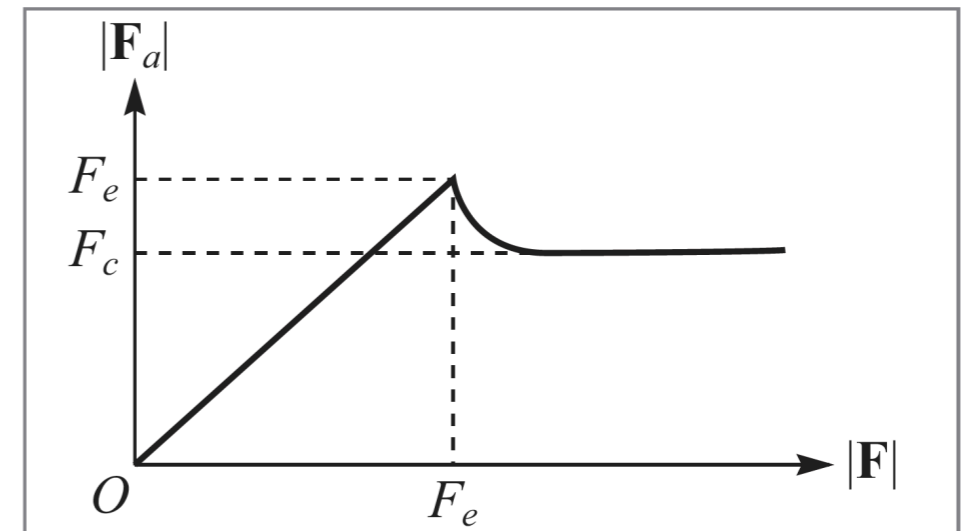
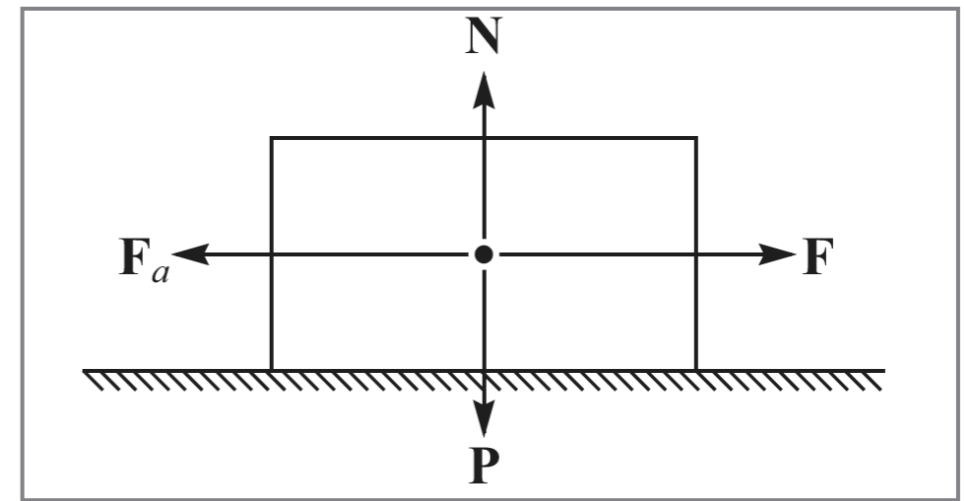
- Considere um bloco que repousa sobre uma superfície horizontal e ao qual se aplica uma força  $\vec{F}$  também horizontal

– Na direção vertical:

$$|\vec{N}| = |\vec{P}|$$

– Na direção horizontal:

$$\vec{F}_a = -\vec{F}, \text{ para } |\vec{F}| < F_e$$



Enquanto  $|\vec{F}| < F_e$ , a força de atrito se ajusta automaticamente para equilibrar  $\vec{F}$

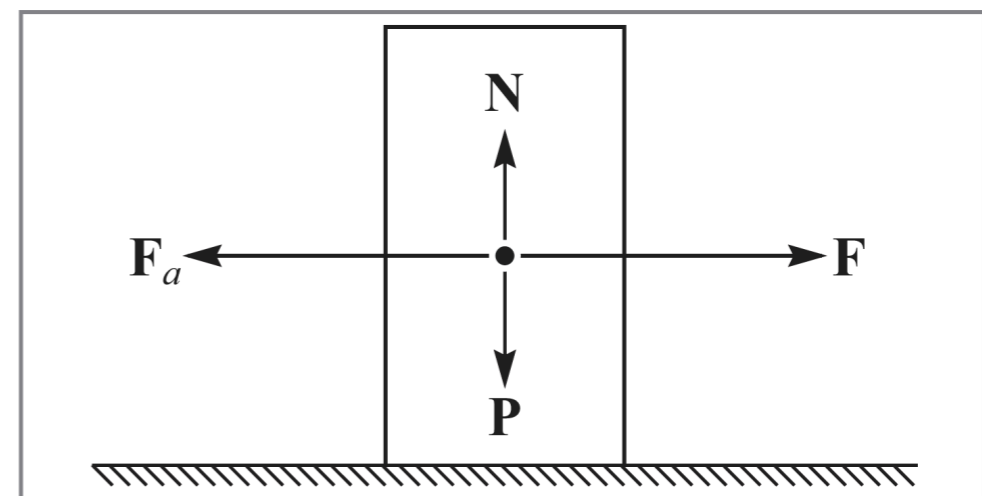
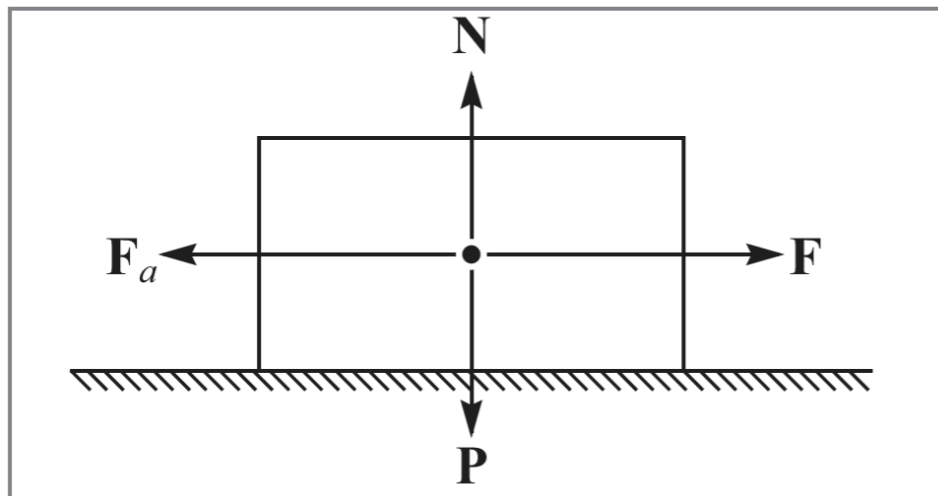
# Características da força de atrito estático

- As "leis do atrito" são as seguintes:

- A força de atrito máxima  $F_e$ , para a qual o bloco começa a se mover, é proporcional ao módulo da força normal de contato  $|\vec{N}|$  entre as duas superfícies

$$|\vec{F}_a|_{\max} = F_e = \mu_e |\vec{N}|$$

- O coeficiente de proporcionalidade  $\mu_e$ , que se chama coeficiente de atrito estático, depende da natureza das duas superfícies em contato
- A força  $F_e$  é independente da área de contato entre os dois corpos



# Características da força de atrito estático e cinético/dinâmico

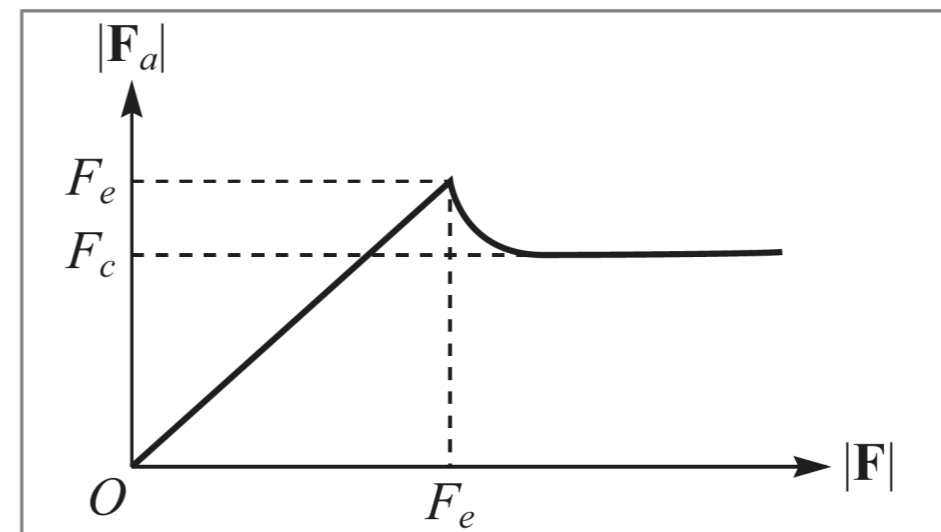
- As "leis do atrito" são as seguintes:

- A força de atrito máxima  $F_e$ , para a qual o bloco começa a se mover, é proporcional ao módulo da força normal de contato  $|\vec{\mathbf{N}}|$  entre as duas superfícies

$$|\vec{\mathbf{F}}_a|_{\max} = F_e = \mu_e |\vec{\mathbf{N}}|$$

- O coeficiente de proporcionalidade  $\mu_e$ , que se chama coeficiente de atrito estático, depende da natureza das duas superfícies em contato
- A força  $F_e$  é independente da área de contato entre os dois corpos
- Uma vez atingido o valor  $F_e$ , e depois que o bloco começa a deslizar, verifica-se geralmente uma diminuição na força de atrito

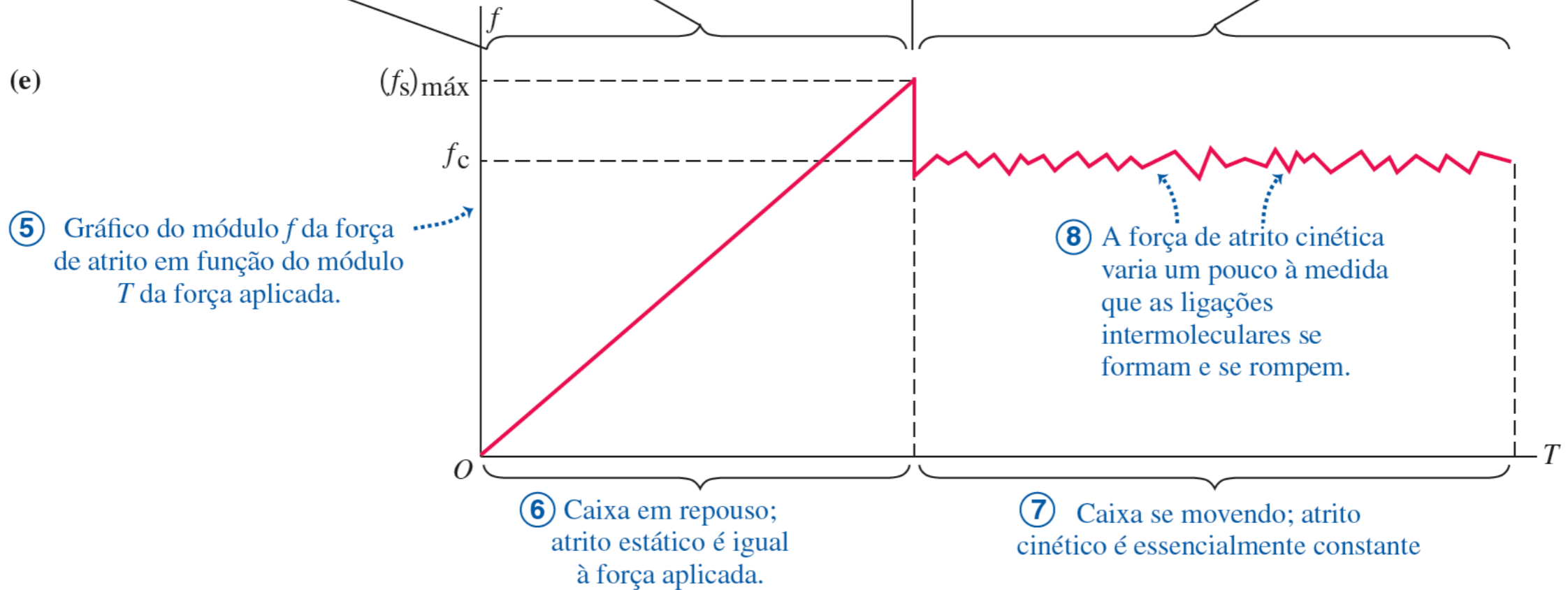
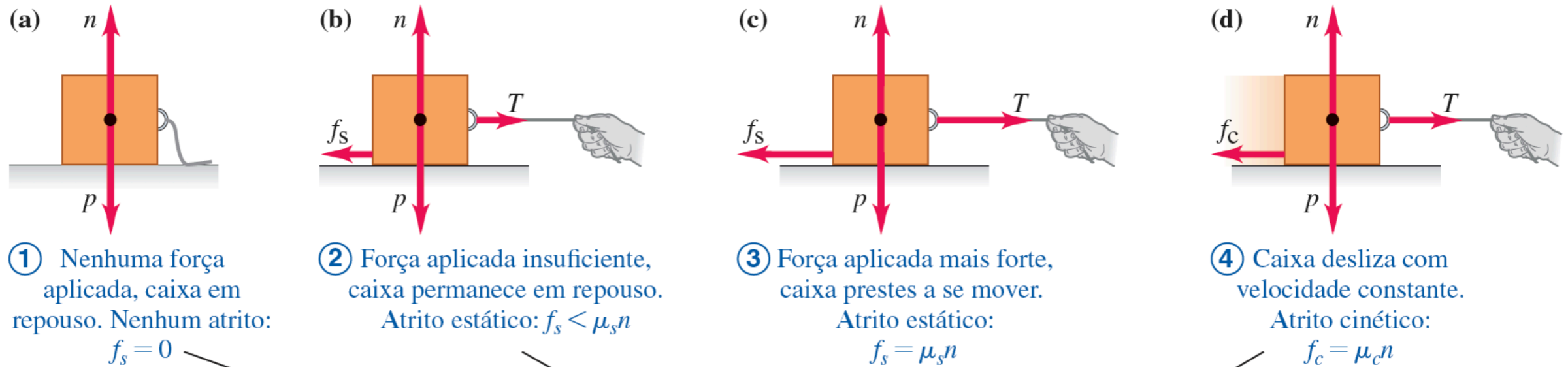
$$|\vec{\mathbf{F}}_a| = F_c = \mu_c |\vec{\mathbf{N}}|, \text{ com } \mu_c < \mu_e$$



# Valores aproximados de coeficiente de atrito

<b>Materiais</b>	<b>Coeficiente de atrito estático, <math>\mu_s</math></b>	<b>Coeficiente de atrito cinético, <math>\mu_c</math></b>
Aço com aço	0,74	0,57
Alumínio com aço	0,61	0,47
Cobre com aço	0,53	0,36
Latão com aço	0,51	0,44
Zinco com ferro fundido	0,85	0,21
Cobre com ferro fundido	1,05	0,29
Vidro com vidro	0,94	0,40
Cobre com vidro	0,68	0,53
Teflon <sup>®</sup> com Teflon <sup>®</sup>	0,04	0,04
Teflon <sup>®</sup> com aço	0,04	0,04
Borracha com concreto (seco)	1,0	0,8
Borracha com concreto (úmido)	0,30	0,25

# Diagrama de corpo livre com força de atrito



# Exemplo: carro numa curva

- Um carro está fazendo uma curva com raio  $R$  em uma estrada plana. Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for igual a  $\mu_s$ , qual é a velocidade máxima com a qual o carro pode completar a curva sem deslizar?

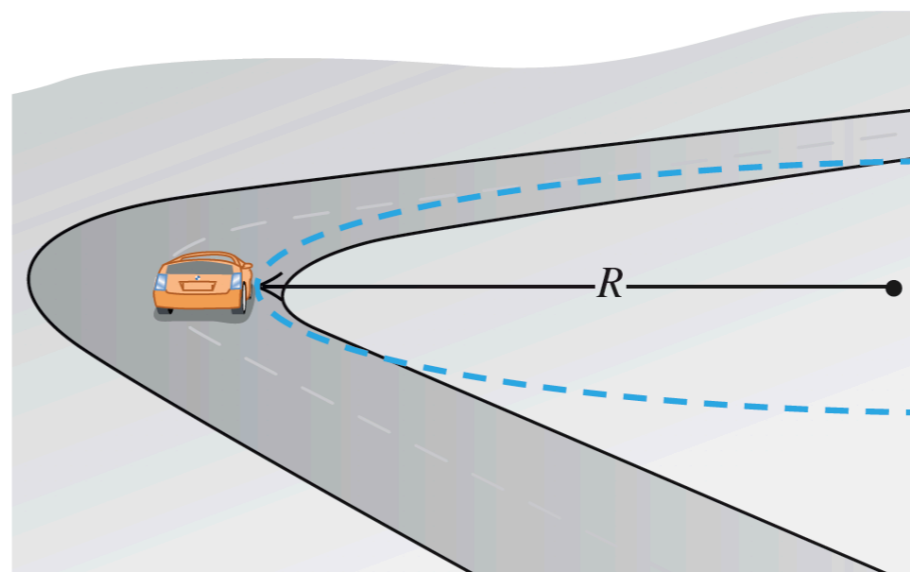
$$\Sigma F_y = n - m g = 0 \rightarrow n = m g$$

$$\Sigma F_x = F_a = m a_{rad} = m \frac{v^2}{R}$$

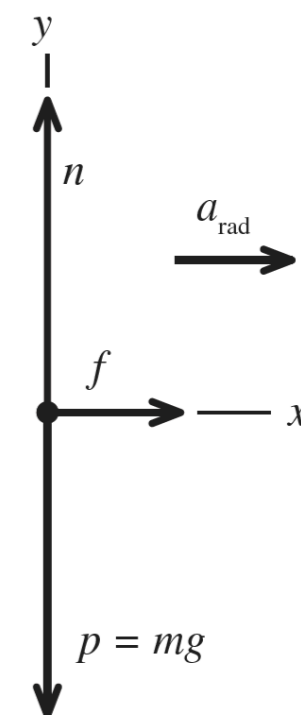
$$F_a = \mu_s n = \mu_s m g = m \frac{v^2}{R}$$

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s g R}$$

(a) Um carro contorna uma curva em uma estrada plana



(b) Diagrama do corpo livre para o carro



# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Diagrama de corpo livre
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- Exercícios de Fixação

# A força de arraste é extremamente complexa e sua dependência exata com a velocidade raramente é conhecida

- Ao colocar a mão para fora da janela de um carro em movimento, qualquer um ficará convencido da existência da força de arraste
- A força de arraste é a força de atrito que surge num corpo quando este se desloca através de um fluido
- Em baixas velocidades, a força de arraste depende da viscosidade do fluido e é, geralmente, proporcional à velocidade do corpo

$$|\vec{\mathbf{R}}| = \alpha |\vec{\mathbf{v}}|$$

- Em altas velocidades, a força de arraste fica mais forte devido ao aparecimento de turbulência, de modo que esta, agora, depende de  $|\vec{\mathbf{v}}|^2$ , i.e.

$$|\vec{\mathbf{R}}| = \beta |\vec{\mathbf{v}}|^2$$



# Exemplo: velocidade terminal

- Suponha que você solte uma bola de metal na superfície de um balde de óleo e a deixe cair até o fundo. Quais são a aceleração, a velocidade e a posição da bola de metal em função do tempo?

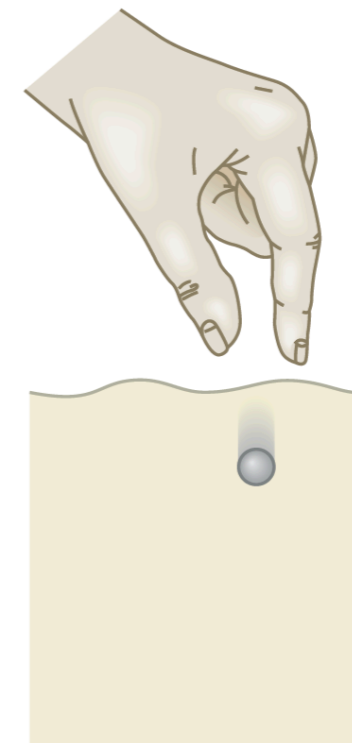
– Na direção vertical:

$$\Sigma F_y = mg - \alpha v_y = m a_y$$

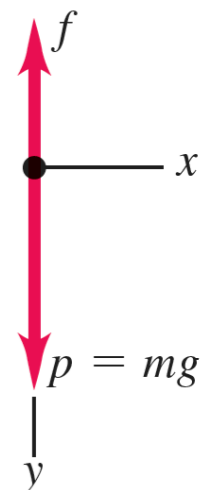
– Quando  $\Sigma F_y = mg - \alpha v_y = 0$ :

$$v_t = \frac{mg}{\alpha} \quad (\text{Velocidade terminal})$$

(a) Uma bola de metal caindo através do óleo



(b) Diagrama do corpo livre para a bola no óleo



# Exemplo: velocidade terminal

- Suponha que você solte uma bola de metal na superfície de um balde de óleo e a deixe cair até o fundo. Quais são a aceleração, a velocidade e a posição da bola de metal em função do tempo?

– Na direção vertical:

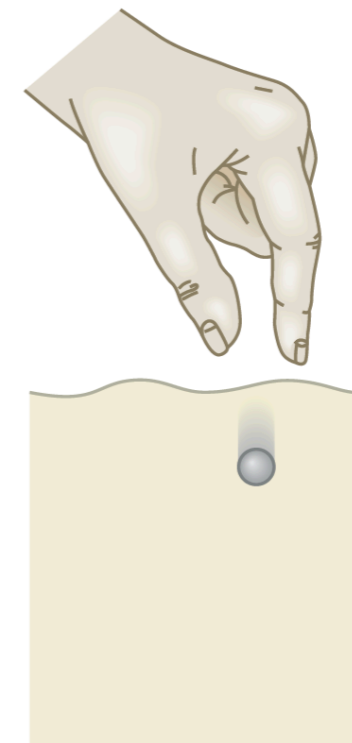
$$m \frac{dv_y}{dt} = mg - \alpha v_y \rightarrow \frac{m}{\alpha} \frac{dv_y}{dt} = \frac{mg}{\alpha} - v_y$$

$$\frac{m}{\alpha} \frac{dv_y}{dt} = v_t - v_y \rightarrow \frac{dv_y}{v_t - v_y} = \frac{\alpha}{m} dt$$

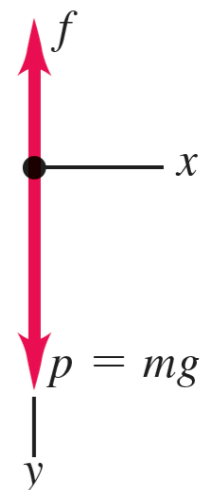
$$\int_0^{v_y} \frac{dv'_y}{v_t - v'_y} = \int_0^t \frac{\alpha}{m} dt' \rightarrow \ln \left( \frac{v_t - v_y}{v_t} \right) = -\frac{\alpha}{m} t$$

$$1 - \frac{v_y}{v_t} = \exp \left( -\frac{\alpha}{m} t \right) \rightarrow v_y(t) = v_t \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\alpha}{m} t \right) \right]$$

(a) Uma bola de metal caindo através do óleo



(b) Diagrama do corpo livre para a bola no óleo



# Exemplo: velocidade terminal

- Suponha que você solte uma bola de metal na superfície de um balde de óleo e a deixe cair até o fundo. Quais são a aceleração, a velocidade e a posição da bola de metal em função do tempo?

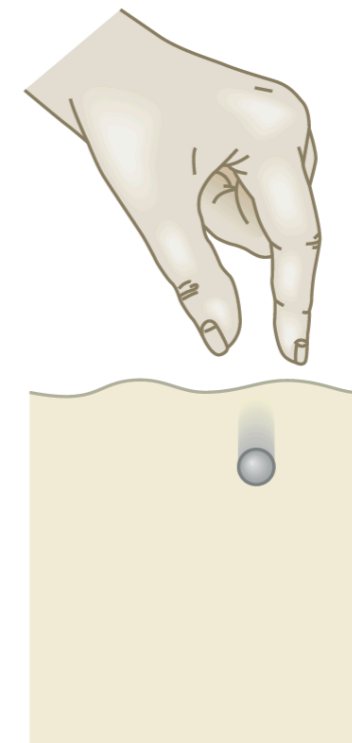
– Na direção vertical:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = v_t \frac{d}{dt} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right] = g \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$$

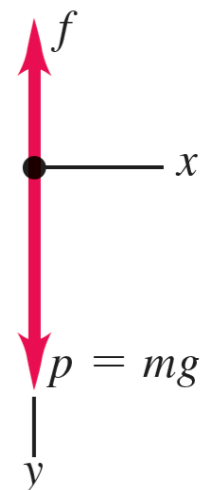
$$y(t) = \int_0^t v_y(t') dt' = v_t \int_0^t \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t'\right) \right] dt'$$

$$y(t) = v_t \left\{ t - \frac{m}{\alpha} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right] \right\}$$

(a) Uma bola de metal caindo através do óleo



(b) Diagrama do corpo livre para a bola no óleo

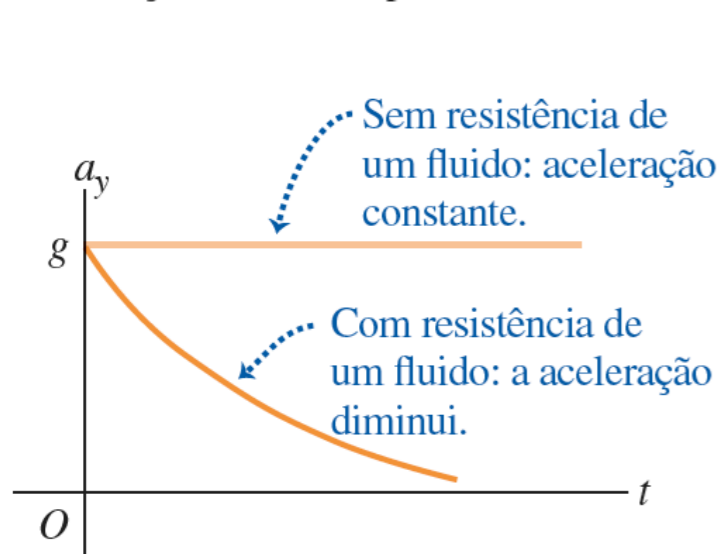


# Exemplo: velocidade terminal

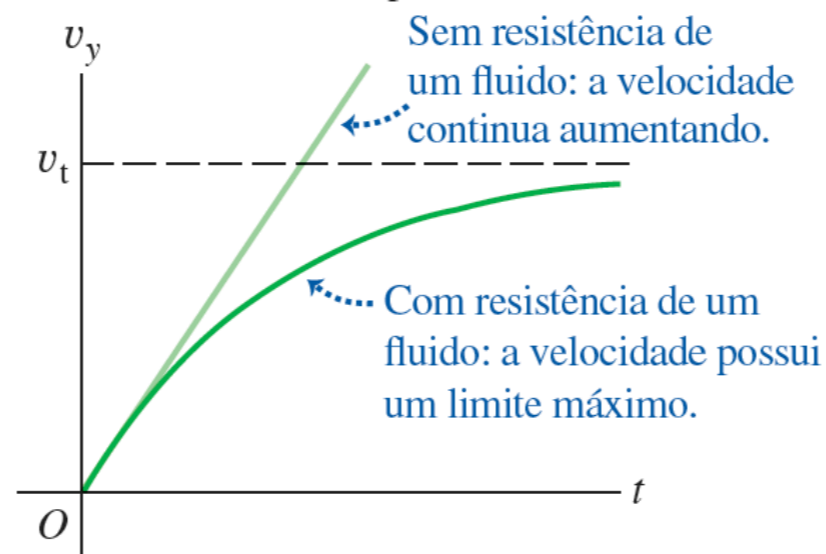
- Suponha que você solte uma bola de metal na superfície de um balde de óleo e a deixe cair até o fundo. Quais são a aceleração, a velocidade e a posição da bola de metal em função do tempo?

$$a_y(t) = g \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad v_y(t) = v_t \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right] \quad y(t) = v_t \left\{ t - \frac{m}{\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right] \right\}$$

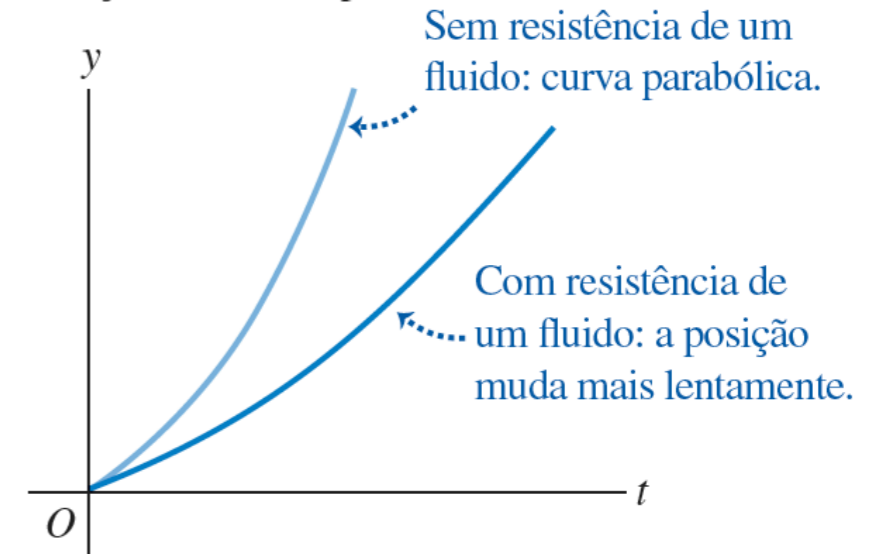
Aceleração *versus* tempo



Velocidade *versus* tempo



Posição *versus* tempo



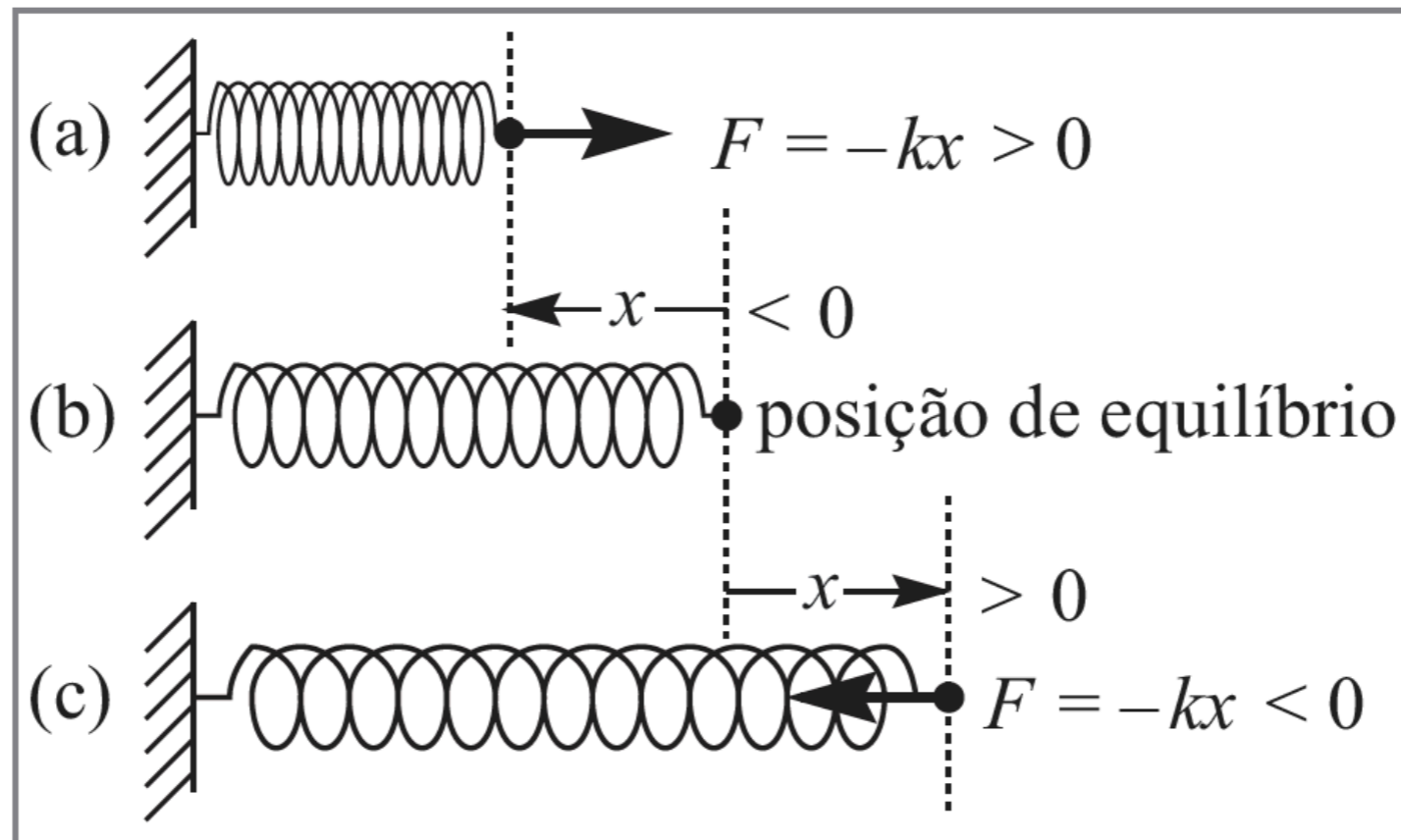
# Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Diagrama de corpo livre
- **Forças fenomenológicas**
  - *Normal*
  - *Tensão ou tração*
  - *Atrito ou fricção*
  - *Arraste*
  - *Força elástica*
- Exercícios de Fixação

# Características da força elástica

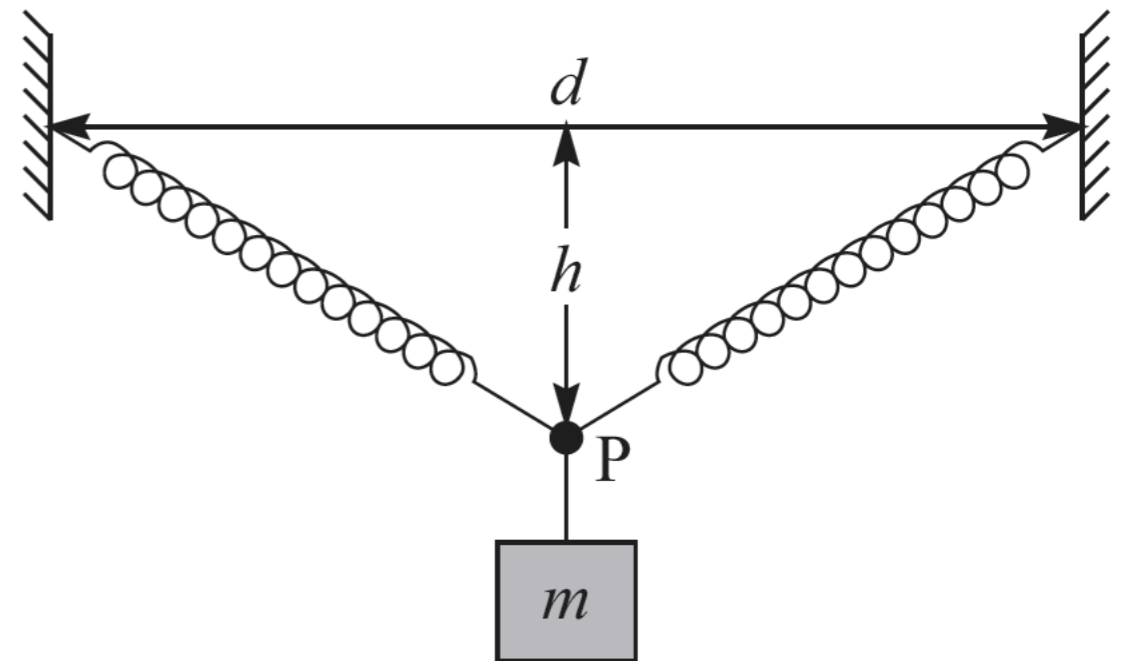
- A força elástica restauradora numa mola é dada pela lei de Hooke, sendo esta proporcional ao seu deslocamento (compressão ou distensão) com relação ao seu ponto de equilíbrio

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$



# Exercício para casa

- O sistema abaixo está em equilíbrio. A distância  $d$  é de 1,0 m e o comprimento relaxado de cada uma das duas molas iguais é de 0,50 m. A massa  $m$  de 1,0 kg faz descer o ponto P de uma distância  $h = 15$  cm. A massa das molas é desprezível. Calcule a constante  $k$  das molas.



# Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos do capítulo 5**
  - *Exercícios da seção 5.1: 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, e 5.10*
  - *Exercícios da seção 5.2: 5.15, 5.16, 5.17, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22*
  - *Exercícios da seção 5.3: 5.25, 5.26, 5.27, 5.29, 5.32, 5.33, 5.34, 5.35, 5.38, 5.39 e 5.40*
  - *Exercícios da seção 5.4: 5.43, 5.45, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51, 5.53, 5.56 e 5.57*