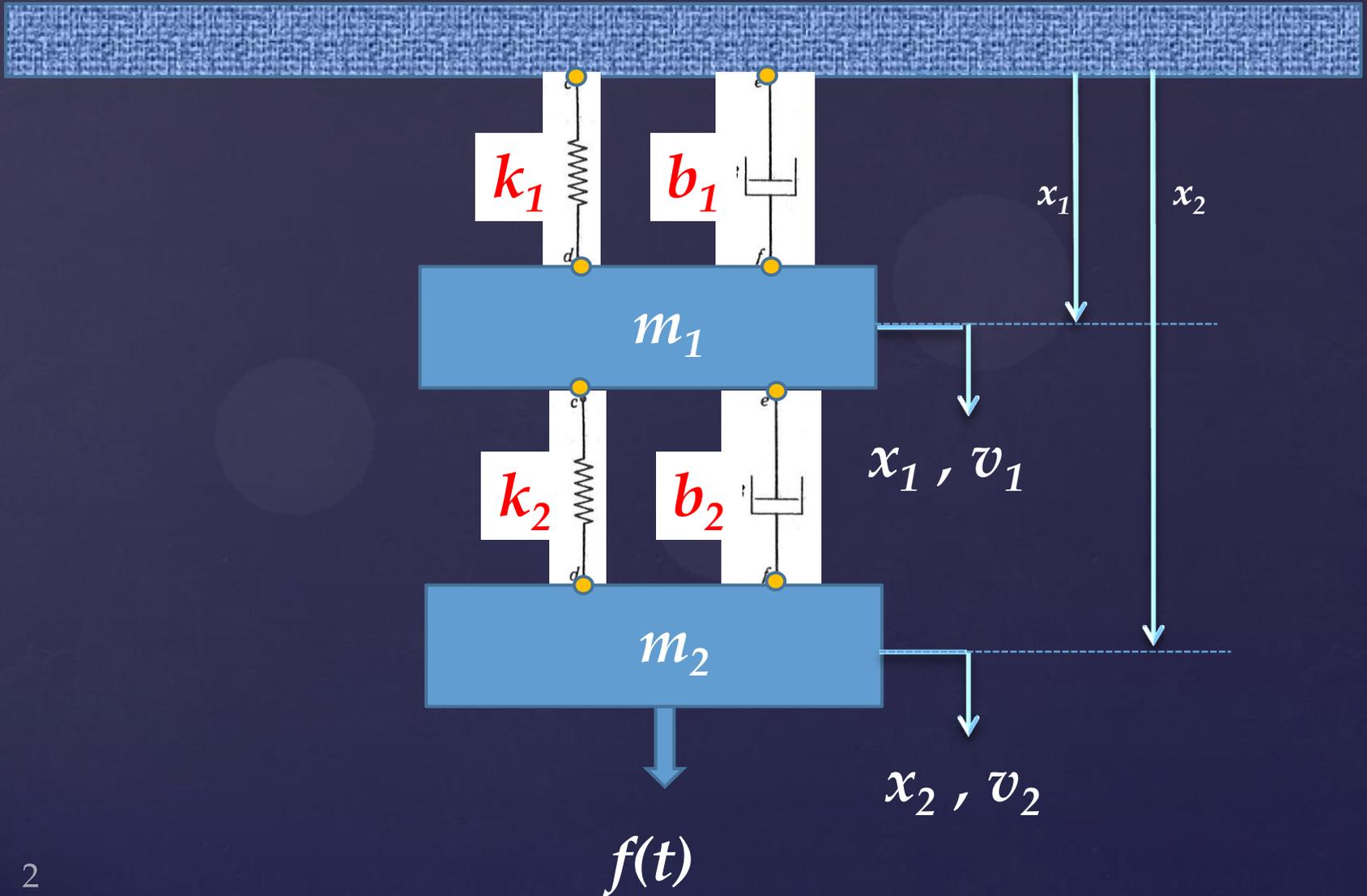
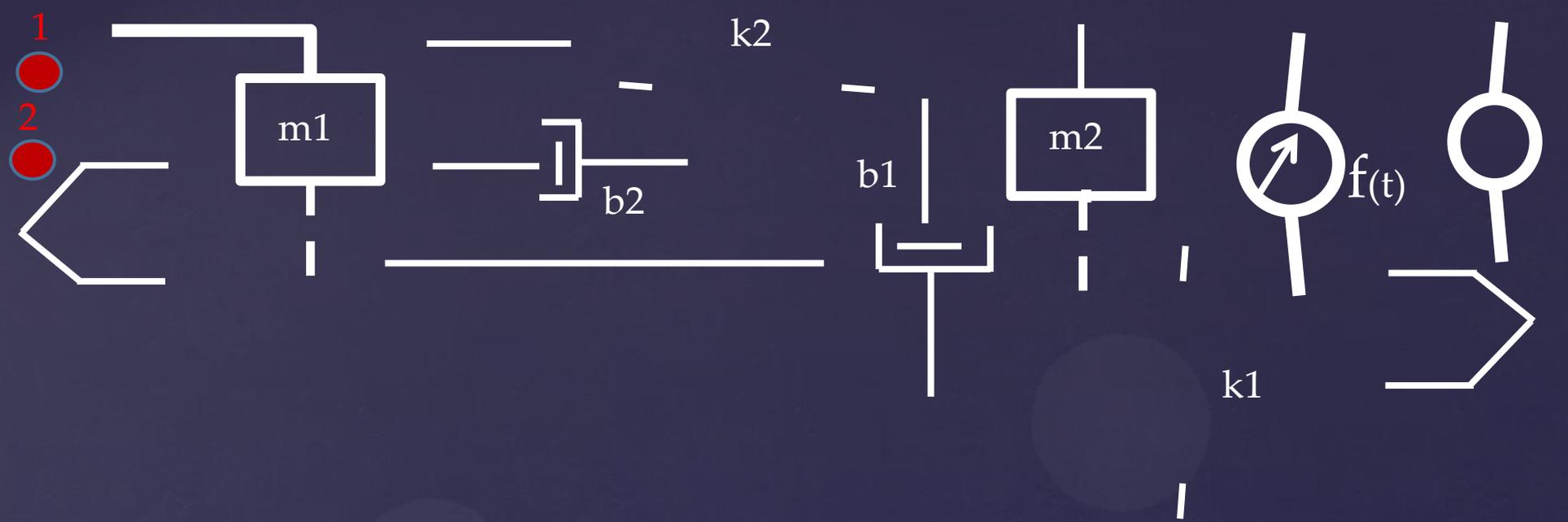


# Exercícios de modelagem através da analogia do tipo 2

*·Analogias mecânica/elétrica*  
*❖  $f \rightarrow i; v \rightarrow V$*

# Ex. 1





- 1
- 2

R2



R1



C2



C1



L2



L1



$\uparrow$

$i$



# Modelo matemático: circuito elétrico

Lei dos nós: dois nós de tensão desconhecida

## 1. Nó 2

$$V_2 \left( C_2 D + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 D} \right) - V_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 D} \right) = i(t)$$

## 2. Nó 1

$$V_1 \left( C_1 D + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1 D} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 D} \right) - V_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{L_2 D} \right) = 0$$

# Analogia $f \rightarrow i$   $v \rightarrow V$

<b>Mec. Trans.</b>	$f(t)$ [N]	$v(t)$ [m/s]	m [kg]	b	k	$Q=mv$	$\dot{Q} = ma$ $=f(t)$ [N]	$\tau$ $= \int f dx = \int P dt$ [J]
<b>Mec. Rot.</b>	$M_G(t)$ [N.m]	$\omega(t)$ [rad/s]	$J_G$ [kgm <sup>2</sup> ]	B	K	$H=J_G\omega$	$\dot{H} = J_G\dot{\omega}$ $=M_G(t)$ [N.m]	$\tau_r = \int M_G d\theta$ [J]
<b>Elétrica</b>	$i(t)$ [A]	$V(t)$ [V]	C [F]	1/R [Ω]	1/L [H]	$q=CV$	$\dot{q} = C\dot{V}$ $= i(t)$ [A]	$\tau_e$ $\int i V dt = \int P dt$ [J]



ATRAVÉS   ENTRE

<b>Mec. Trans.</b>	$\int f dt = I = \Delta Q$	$\int v dt = \Delta x$ [m]	$P = fv$ [W]	$T = \frac{1}{2}mv^2$ [J]	$V = \frac{1}{2}kx^2$ [J]	$P_d = bv^2$ [W]
<b>Mec. Rot.</b>	$\int M_G dt = \Delta H$	$\int \omega dt = \Delta \theta$ [rad]	$P_r = M_G\omega$ [W]	$T = \frac{1}{2}J_G\omega^2$ [J]	$V_r = \frac{1}{2}K\theta^2$ [J]	$P_d = B\omega^2$ [W]
<b>Elétrica</b>	$\int i dt = \Delta q$ [C]	$\int V dt = \Delta \lambda$ [Web]	$P_e = iV$ [W]	$T = \frac{1}{2}CV^2$ [J]	$V_e = \frac{1}{2}\lambda^2/L$ [J]	$P_d = (1/R) V^2$ $= Ri^2$ [W]

# Modelo matemático: circuito mecânico (usando a tabela de analogias)

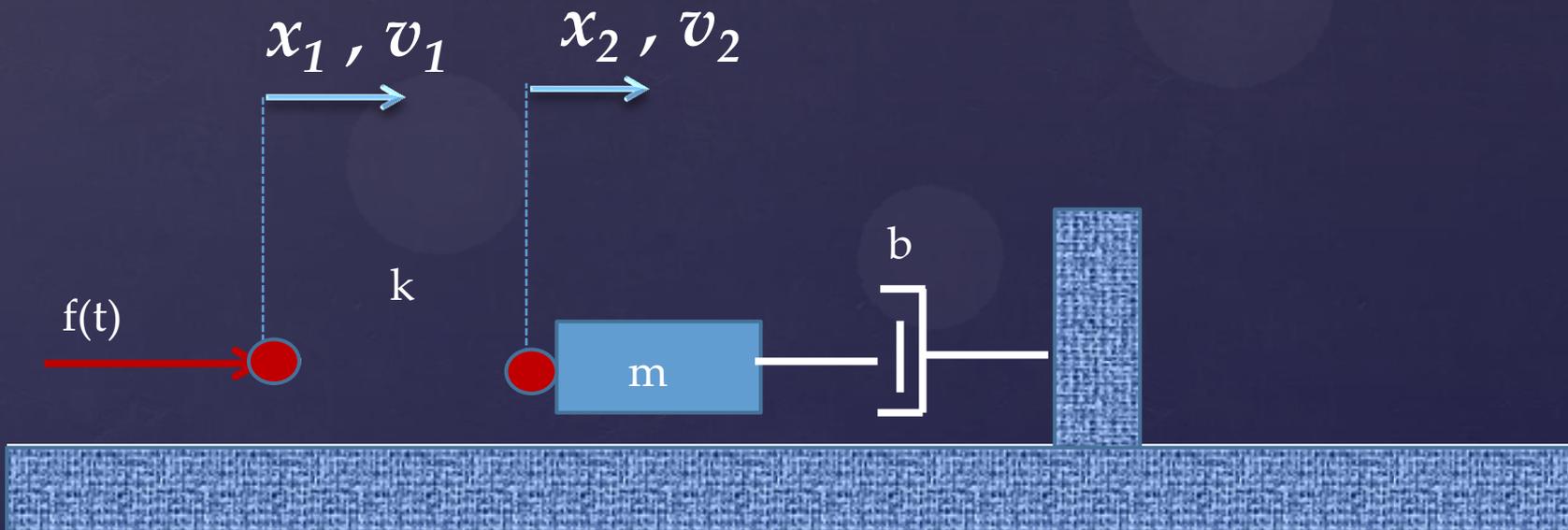
## 1. Nó 2

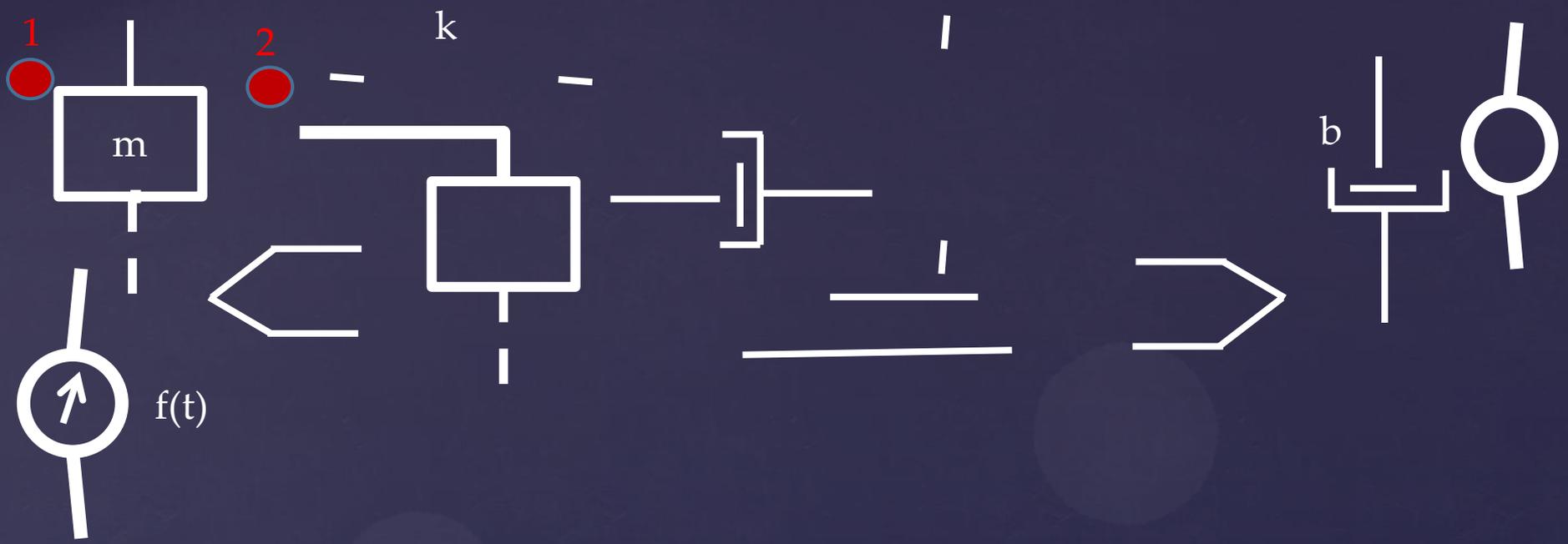
$$v_2 \left( m_2 D + b_2 + \frac{k_2}{D} \right) - v_1 \left( b_2 + \frac{k_2}{D} \right) = f(t)$$
$$(m_2 \dot{v}_2 + b_2 v_2 + k_2 x_2) - (b_2 v_1 + k_2 x_1) = f(t)$$

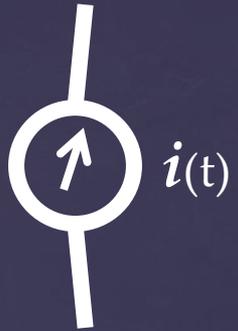
## 2. Nó 1

$$v_1 \left( m_1 D + b_1 + \frac{k_1}{D} + b_2 + \frac{k_2}{D} \right) - v_2 \left( b_2 + \frac{k_2}{D} \right) = 0$$
$$(m_1 \dot{v}_1 + b_1 v_1 + k_1 x_1 + b_2 v_1 + k_2 x_1) - (b_2 v_2 + k_2 x_2) = 0$$

# Ex. 2







$L$



# Modelo matemático: circuito elétrico e mecânico

Lei dos nós: dois nós de tensão desconhecida

## 1. Nó 1

$$V_1 \left( \frac{1}{LD} \right) - V_2 \left( \frac{1}{LD} \right) = i(t) \xrightarrow{\text{tabela}} \underbrace{k(x_1 - x_2) = f(t)}$$

## 2. Nó 2

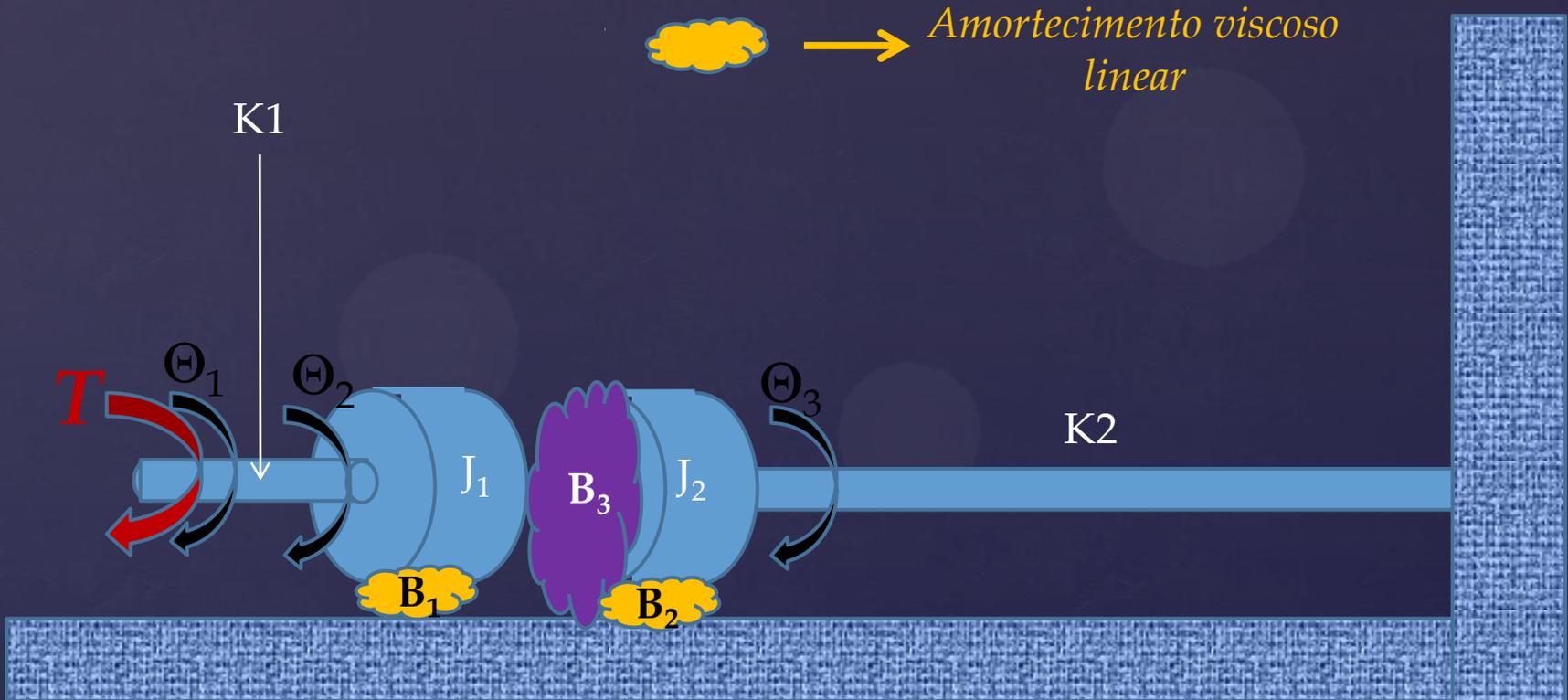
$$V_2 \left( CD + \frac{1}{R} + \frac{1}{LD} \right) - V_1 \left( \frac{1}{LD} \right) = 0$$

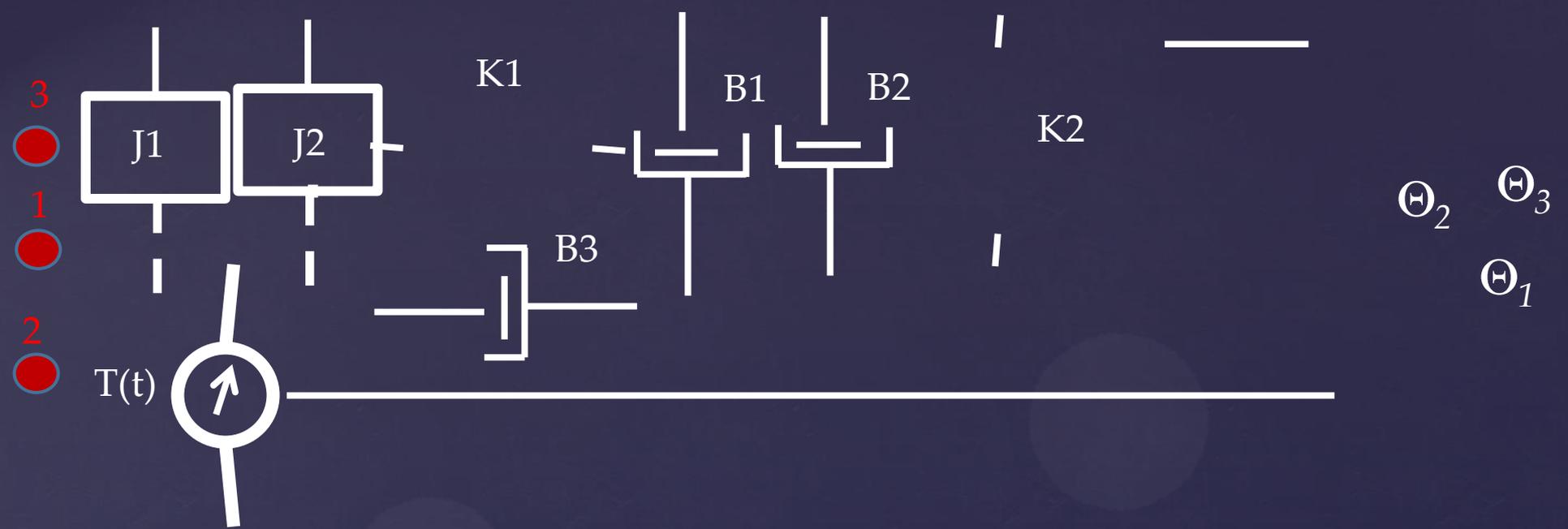
$$\xrightarrow{\text{tabela}} m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 = f(t)$$

# Ex.3

## Modelo físico de um sistema rotativo





- 3
- 1
- 2

R1

R2

R3

C1

C2

L1

L2

$i(t)$

$V_3$

$V_2$

$V_1$



## *Exercício 1 para casa:*

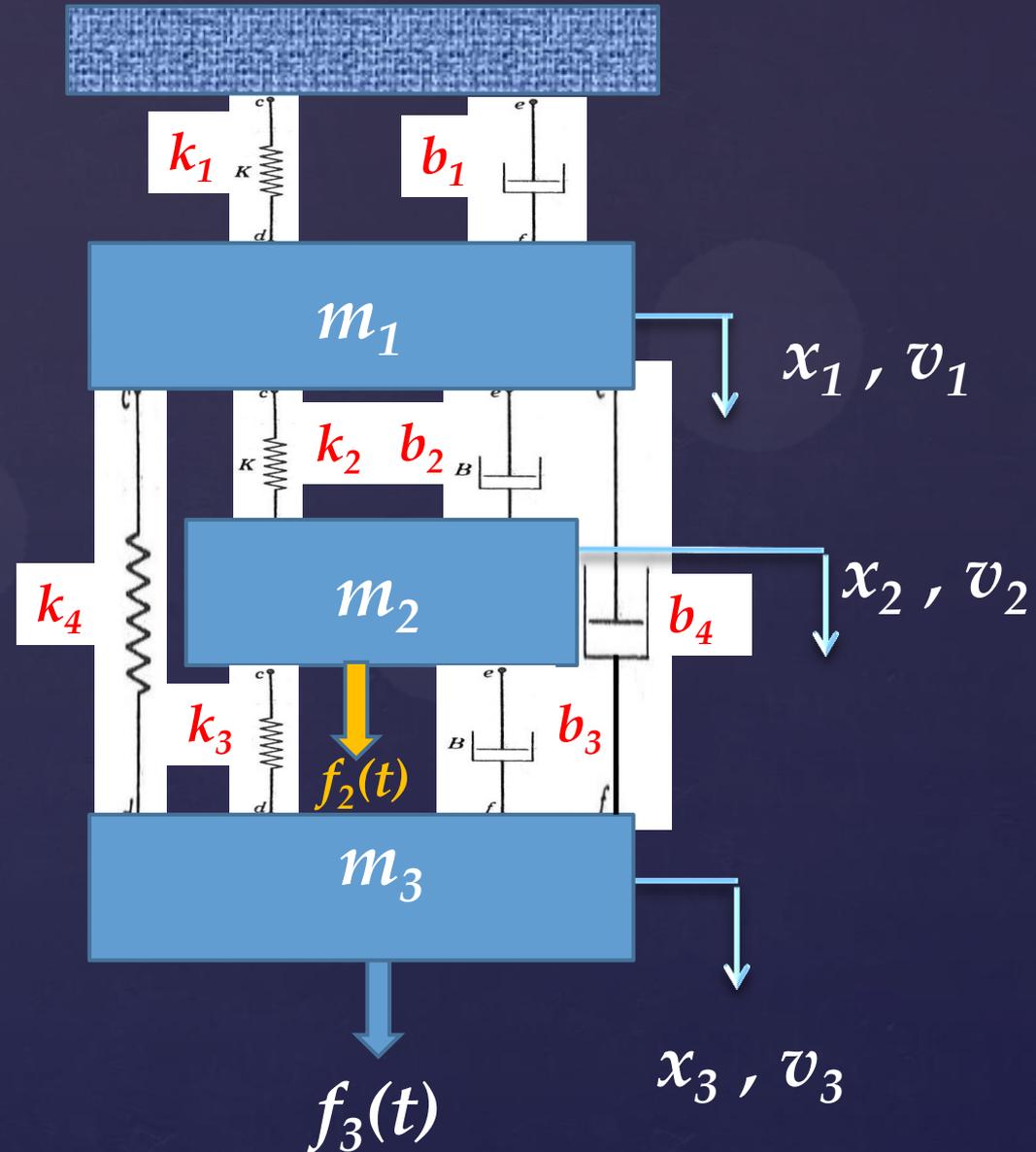
Obter o modelo matemático por analogia para o modelo físico do sistema rotativo

## *Exercícios para casa*

Para os modelos físicos do *Ex. 2, 3, 4, 5 e 6* seguintes:

- a) Obtenha o modelo matemático usando as equações de Lagrange
- b) Obtenha o circuito mecânico
- c) Obtenha o circuito elétrico equivalente
- d) Obtenha as equações do circuito elétrico
- e) Obtenha as equações do modelo físico por analogia.

## Ex. 2

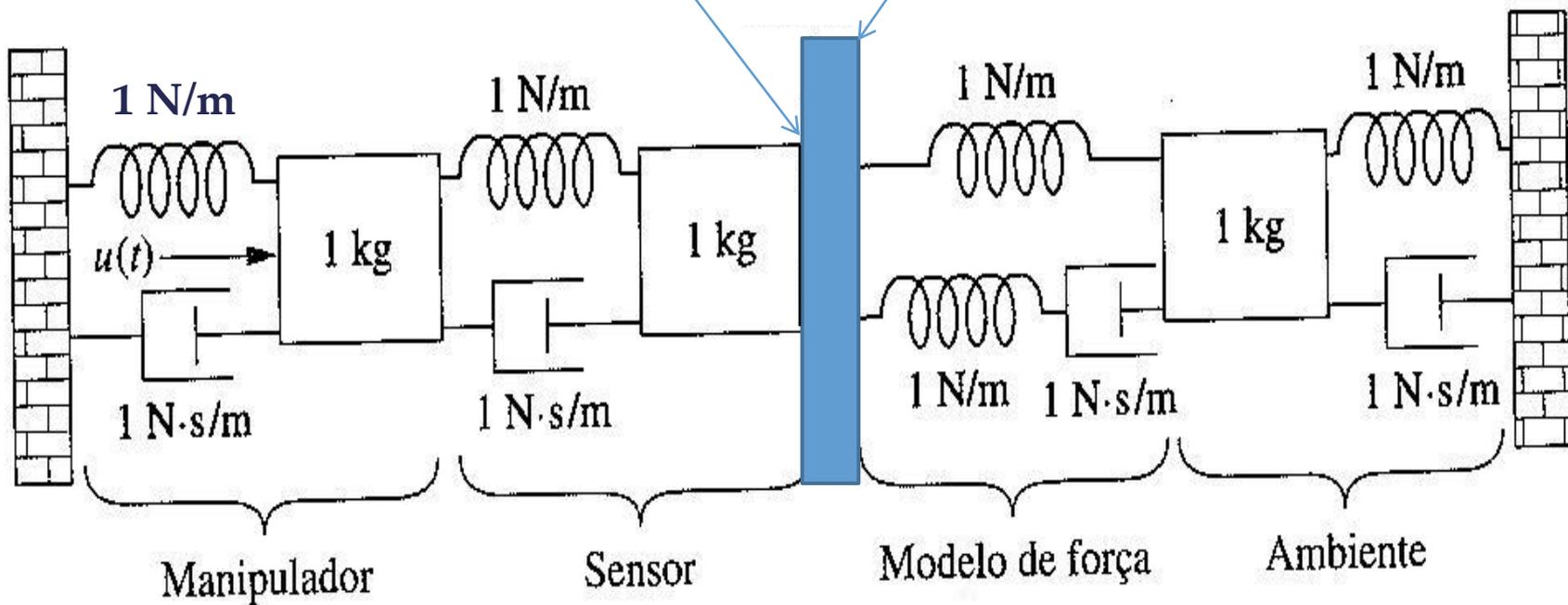


# Tarefas para casa

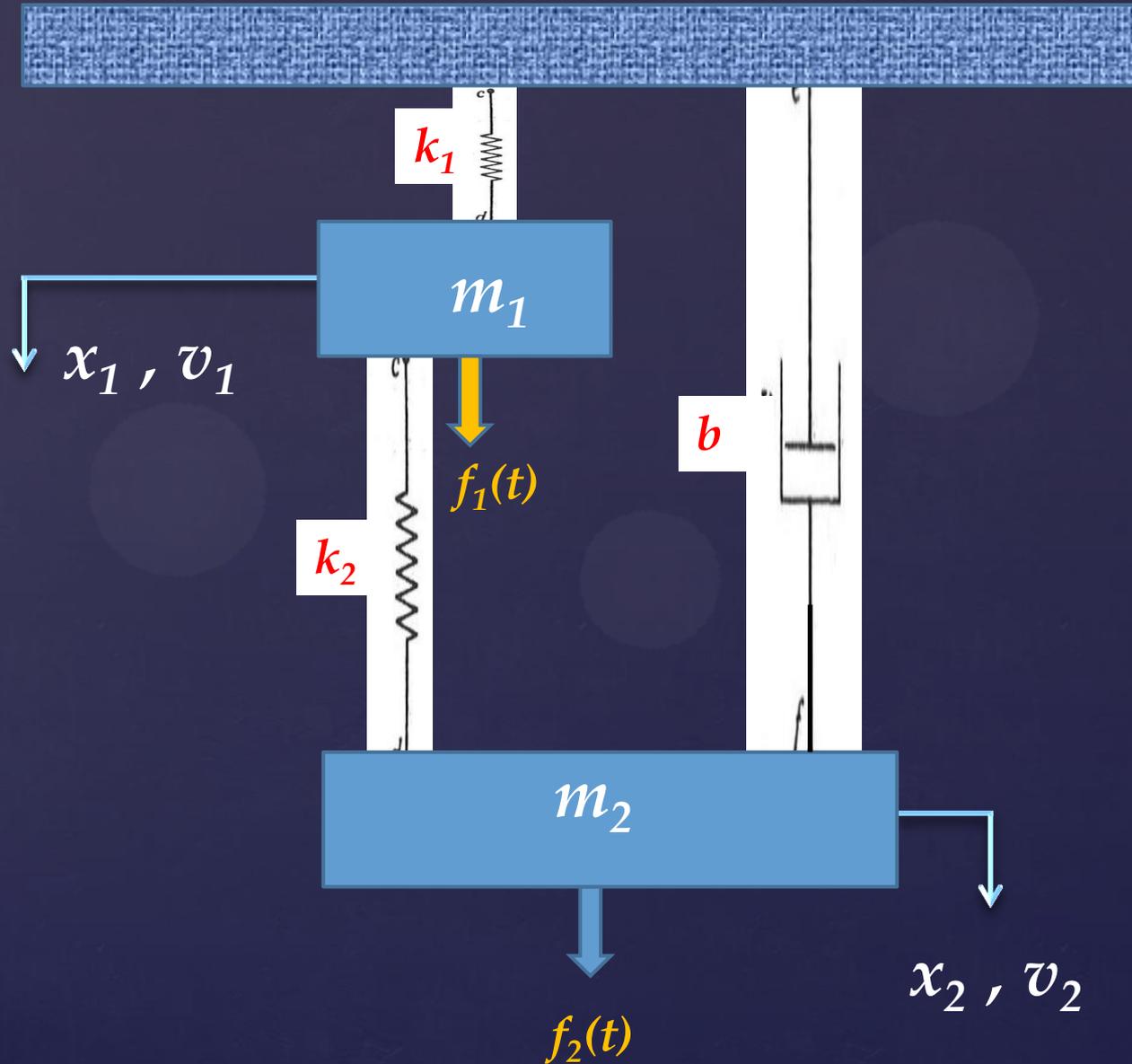
## Ex. 3

Contato sem atrito

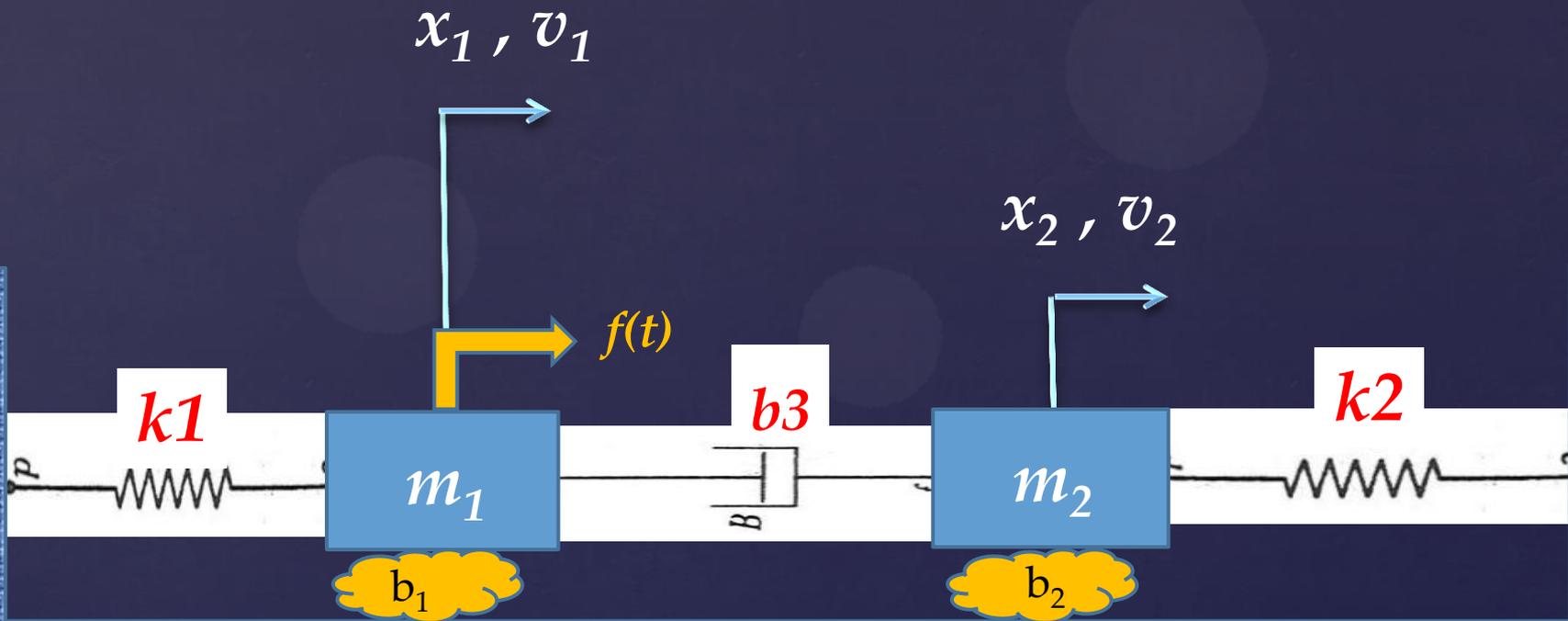
massa 2 kg ligada às molas



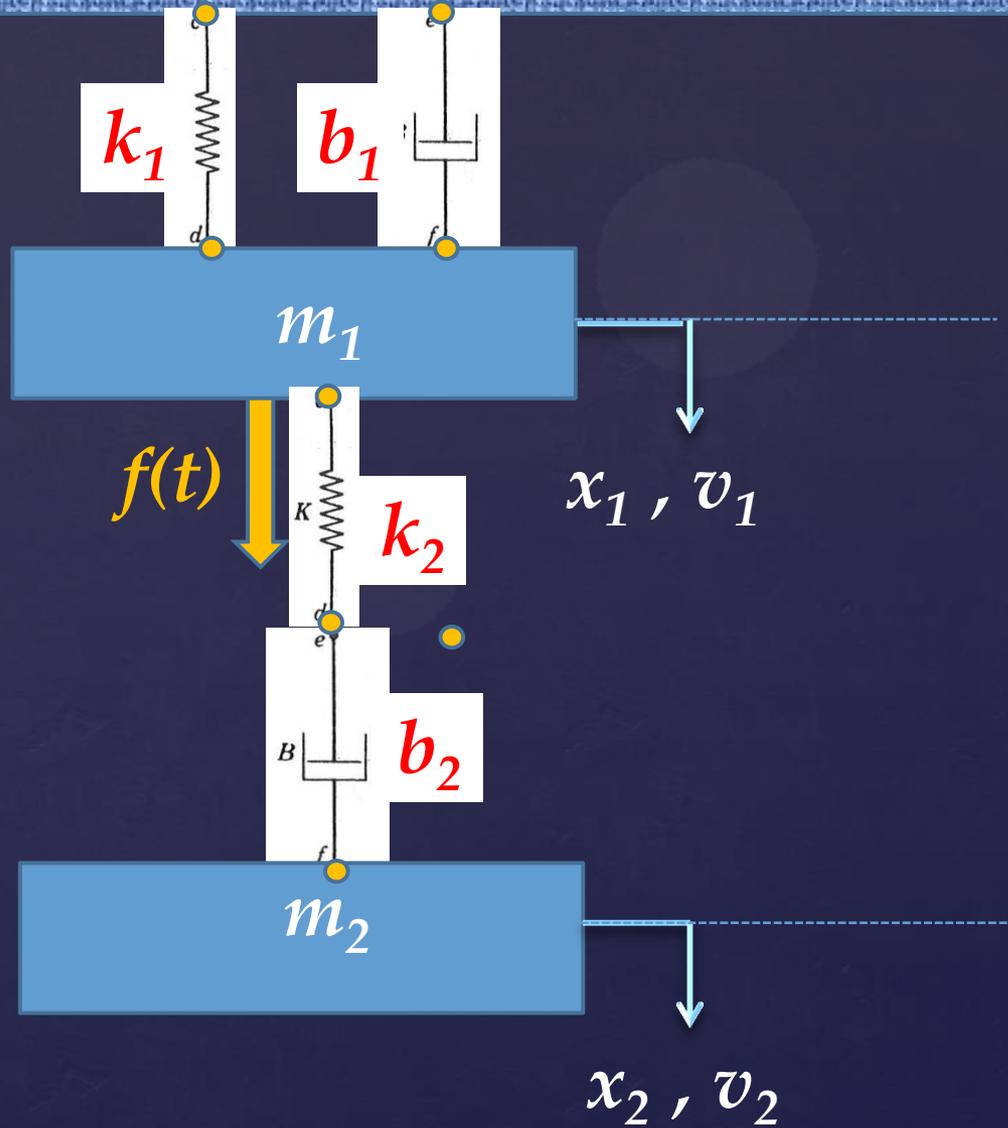
# Ex. 4



# Ex. 5



# Ex. 6

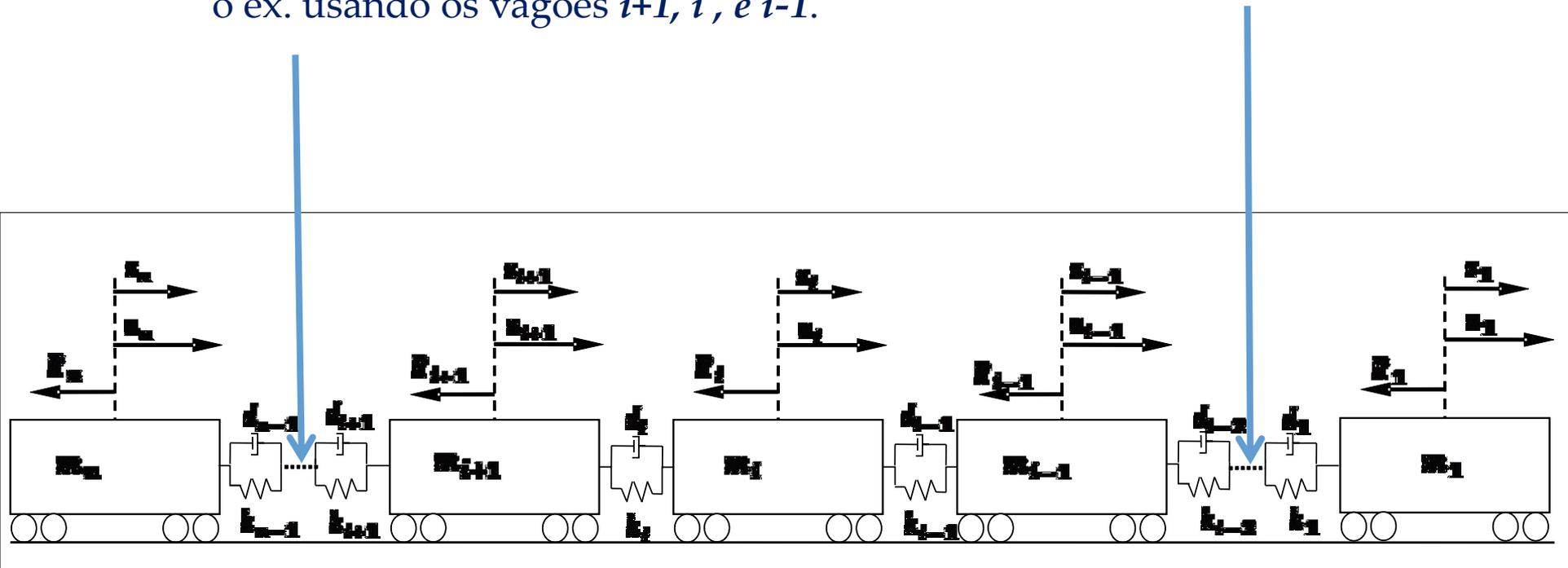


## Ex. 7

Considere o estudo do movimento longitudinal do trem, cujo modelo físico é apresentado ilustrado a seguir, onde  $i$  faz referência à posição do vagão ao longo do trem,  $x$  ao deslocamento,  $\dot{x}$  à velocidade. Na figura  $m_i$  é a massa de cada vagão,  $u_i$  é a força de entrada (tração ou freio),  $k_i$  é a constante de mola do acoplamento,  $d_i$  é a constante de amortecimento do acoplamento. Considere a aceleração da gravidade  $g$  e  $\theta_i$  o ângulo do plano da via na direção longitudinal.  $R_i$  é a força de resistência ao movimento, modelada como um atrito viscoso linear.

Usando a analogia (força, corrente) e (velocidade, tensão), construa o circuito mecânico análogo; construa o circuito elétrico equivalente; determine as equações diferenciais que modelam o sistema mecânico.

O pontilhado significa que há outros vagões semelhantes entre os elementos indicados, isto é, a configuração se repete, portanto resolver o ex. usando os vagões  $i+1$ ,  $i$ , e  $i-1$ .



### Ex. 8

Determine o modelo matemático do sistema por analogia abaixo admitindo que  $w(t)$ :

- Seja um deslocamento imposto pela via;
- Seja uma força imposta pela via.

