1. **LISTA 1 - CLASSE.**

Exemplo 1.1. Considere as sequências de conjuntos:

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}\,,\ n \geq 1;$$

$$B_n = \{0, n\}\,,\ n \geq 1;$$

$$C_n = \begin{cases} \{0, n\}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{1, n\}\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}\ ,\ n \geq 1;$$

e

$$D_n = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{n\}\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}\ ,\ n \geq 1$$

Encontre os lim sup, lim inf e lim (se existir) das sequências $(A_n)_{n\geq 1}$, $(B_n)_{n\geq 1}$, $(C_n)_{n\geq 1}$ e $(D_n)_{n\geq 1}$.

Nos casos em que o limite da sequência exista , compare o limite da probabilidade e a probabilidade do limite dos eventos, utilizando a distribuição Poisson(λ).

(a)

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}\,,\ n \geq 1.$$

Solução

Observe que a sequência é crescente pois $A_n \subset A_{n+1}$ e consequentemente

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = N^*.$$

. Finalmente, $P(X \in N^*) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}$ e

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(x \in \{1, 2, \ldots, n\}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda} = P(lim_{n\to\infty} A_n),$$

e o limite da probabilidade dos eventos é igual à probabilidade do limite dos eventos, como esperado.

(b)

$$B_n = \{0, n\}\,,\ n \geq 1$$

Solução

$$\liminf B_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} B_k = \cup_{n\geq 1}\{0\}.$$

$$\limsup B_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} B_k = \cap_{n\geq 1}\{0, n, n+1, ...\} = \{0\}.$$

Portanto $\liminf B_n = \limsup B_n = \lim B_n = \{0\}$ e $P(X \in \lim B_n) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$ e

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(\{0, n\}) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda} + e^{-\theta}\frac{\lambda^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}.$$

e o limite da probabilidade dos eventos é igual à probabilidade do limite dos eventos, como esperado.

(c)

$$C_n = \begin{cases} \{0, n\}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{1, n\}\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, \; n \geq 1$$

Solução

$$\liminf C_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} C_k = \cup_{n\geq 1}\emptyset = \emptyset.$$

$$\limsup C_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} C_k = \cap_{n\geq 1}\{0, 1, n, n+1, n+2, ...\} = \{0, 1\}.$$

Como $\liminf C_n \neq \limsup C_n$, $\lim C_n$ não existe.

(d)

$$D_n = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{n\}\,, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, \; n \geq 1$$

Solução

$$\liminf D_n = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} D_k = \cup_{n\geq 1}\emptyset = \emptyset.$$

$$\limsup D_n = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} D_k = \cap_{n\geq 1} N = N.$$

Como $\liminf D_n \neq \limsup D_n$, $\lim D_n$ não existe.

Email address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil