Anéis, Álgebras, σ-anéis, σ-álgebras

(1)

Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$

1. $\mathcal{A}$ é um <u>anel</u> se $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\ A - B \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{B}$ é uma <u>álgebra</u> se for anel e $\mathbb{X} \in \mathcal{B}$. Ou também, se $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$ e $A^c \in \mathcal{B}$ $(A^c = \mathbb{X} - A)$
3. $\mathcal{C}$ é um <u>σ- anel</u> se for anel e dada a sequência $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_1^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$
4. $\mathcal{D}$ é uma σ- álgebra se $\mathcal{D}$ for álgebra e dada a sequência $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_1^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$

<u>Exemplos</u>: I a. $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ é "tudo"

b. $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$ é "tudo"

c. Se $E \subset \mathbb{X}$, $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, E\}$ é σ-anel

d. Se $E \subset \mathbb{X}$, $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, E, E^c, \mathbb{X}\}$ é σ-álgebra

Tínhamos visto que:

$\mathcal{F}_4 = \{ \bigcup_1^n (a_j, b_j],\ n \in \mathbb{N}\}$ é anel em $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}_5 = \{\{0\}, \bigcup_1^n (a_j, b_j], \{0\} \bigcup_1^n (a_j, b_j]\}$ em $\mathbb{X} = [0,1]$ é álgebra

$\mathcal{F}_6 = \{ \bigcup_1^n (a_j, b_j)\}$ não é anel porque $(a,b) - (c,d) \notin \mathcal{F}_6$ se $(a,b) \cap (c,d) \neq \emptyset$

$\mathcal{F}_7 = \{ \bigcup_1^n [a_j, b_j]\}$ não é anel porque $[a,b] - [c,d] \notin \mathcal{F}_7$ se $[a,b] \cap [c,d] \neq \emptyset$

<u>Afirmação 1</u>: Se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ álgebras (anéis, σ-álgebras, σ-anéis) então $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ é álgebra (anel, σ-álgebra, σ-anel).