Mat 0234. Medida e Integração.

IME-USP.Segundo semestre 2020

Exercício 19 Lista Anéis, etc

Seja um espaço métrico (topológico) X e $\mathcal{A}$ a σ - álgebra gerada pelos conjuntos abertos de X. Ela é chamada de σ - álgebra dos **borelianos**

1. Mostre que a σ-álgebra dos Borelianos de $\mathbb{R}$ é gerada por
   (a) os intervalos abertos (a,b)
   (b) os intervalos fechados [a,b]
   (c) os intervalos semi-abertos [a,b) ou os intervalos semi-abertos (a,b]
   (d) os intervalos semi-infinitos fechados $[a,+\infty)$ ou $(-\infty,a]$
   (e) os intervalos semi-infinitos abertos $(a,+\infty)$ ou $(-\infty,a)$

   Solução: Sejam $\mathcal{F}_j$ as famílias de conjuntos acima e $\mathcal{G}_j$ as σ - álgebras geradas por cada família de conjuntos acima. Vejamos que $\mathcal{G}_{j+1} \supset \mathcal{G}_j$ e $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_5$ mostrando que $\mathcal{G}_{j+1} \supset \mathcal{F}_j$. Logo as $\mathcal{G}_j$ são iguais.
   $\mathcal{G}_2 \supset \mathcal{F}_1$. Com efeito, (a,b)=$\cup_1^{+\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$
   $\mathcal{G}_3 \supset \mathcal{F}_2$. Com efeito, [a,b]=$\cap_1^{+\infty}(a-\frac{1}{n},b]$. Com a família dos [a,b) é análogo.
   $\mathcal{G}_4 \supset \mathcal{F}_3$. Com efeito, (a,b]=$(-\infty,a]^c \cap (-\infty,b]$
   $\mathcal{G}_5 \supset \mathcal{F}_4$. Com efeito, $[a,+\infty)=(-\infty,a)^c$. Análogo $(-\infty,a]$.
   $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{F}_5$. Com efeito, $(a,+\infty)=\cup_1^{+\infty}(a,a+n)$. Análogo $(-\infty,a)$.