# Estatística de Redes Sociais

Antonio Galves

**Módulo 1**

2a. aula

A formação de consenso na rede. O modelo do votante.

# Definindo o modelo $(X_n)_{n\geq 0}$

**Recapitulando:**

Os ingredientes do modelo são:

- A especificação das relações de influência entre os atores;
- A especificação da funcão probabilística usada na escolha de cada nova opinião de um ator, em função das últimas opiniões de seus influenciadores.

# Um modelo simples de Rede Social

- $\mathcal{A}$: conjunto finito de atores.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $X_n(a) \in \mathcal{O}$: última opinião emitida pelo ator $a$, até o instante $n$.
- $A_n \in \mathcal{A}$: ator que emitiu uma opinião no instante $n$.
- $X_n = (X_n(a) : a \in \mathcal{A})$: lista com as últimas opiniões emitidas pelo conjunto de atores, até o instante $n$.
- $X_0, X_1, X_2 \ldots, ..$ sequência descrevendo a evolução das opiniões dos diversos atores ao longo do tempo.

# Conjuntos de influenciadores.

- **Exemplo 1:** Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$, com a convenção $N+1=1$.
- **Exemplo 2:** Seja $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2) :\ a_1 = 1, \ldots, N\,, a_2 = 1, \ldots, N\}$, o conjunto de atores da rede;
- Para cada ator $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{V}_{\cdot \to (a_1,a_2)} = \{(a_1{+}1, a_2), (a_1{-}1, a_2), (a_1, a_2{+}1), (a_1, a_2{-}1)\}\,,$$

também com a convenção $N+1=1$.

# Exemplo de função probabilística usada por um ator para escolher uma nova opinião

- Seja $U_n^a(+1)$ o número de influenciadores do ator $a$, cuja última opinião emitida até o instante $n$ foi $+1$.
- Seja $U_n^a(-1)$, o número de influenciadores do ator $a$, cuja última opinião emitida até o instante $n$ foi $-1$.
- Se o ator $a$ decidir emitir uma opinião no instante $n+1$, ele escolherá a opinião $+1$, com probabilidade

$$p_n^a(+1) = \frac{U_n^a(+1)}{U_n^a(+1) + U_n^a(-1)}$$

- e escolherá a opinião $-1$, com probabilidade

$$p_n^a(-1) = \frac{U_n^a(-1)}{U_n^a(+1) + U_n^a(-1)}$$

# Um algoritmo gerando a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie $A_n$ independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, escolha $O_n = o \in \mathcal{O}$, com probabilidade

   $$\mathbb{P}\{O_n = o \,|\, X_{n-1}, A_n = b\} = p^b_{n-1}(o)$$

   2.3 Para todo $a \in \mathcal{A}$, defina $X_n(a) = O_n$, se $a = A_n$ e $X_n(a) = X_{n-1}(a)$, se $a \neq A_n$.

# Uma outra versão do algoritmo

Em vez de

2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, escolha $O_n = o \in \mathcal{O}$, com probabilidade

$$\mathbb{P}\{O_n = o \,|\, X_{n-1}, A_n = b\} = p_n^b(o),$$

faremos

2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina

$$O_n = X_{n-1}(I_n).$$

# Melhorando o algoritmo

1. Escolho arbitrariamente a lista inicial de opiniões $X_0 = (X_0(a), a \in \mathcal{A})$
2. Para $n = 1, \ldots, T$, onde $T \geq 1$ é um número inteiro arbitrário:
   2.1 Sorteie $A_n$ independentemente dos sorteios passados, com $\mathbb{P}\{A_n = b\} = 1/|\mathcal{A}|$, para todo $b \in \mathcal{A}$, onde $|\mathcal{A}|$ é o número de elementos de $\mathcal{A}$
   2.2 Tendo gerado $X_{n-1} = (X_{n-1}(a) : a \in \mathcal{A})$ e sorteado $A_n = b$, sorteie $I_n \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}$, com probabilidade uniforme e defina
   $$O_n = X_{n-1}(I_n)$$
   2.3 Para todo $a \in \mathcal{A}$, defina $X_n(a) = O_n$, se $a = A_n$ e $X_n(a) = X_{n-1}(a)$, se $a \neq A_n$.

# Explicando em palavras

- Tendo já sorteado todas as opiniões até o instante $n-1$, definimos $X_n$ da seguinte maneira:
- Primeiro sorteamos o ator $A_n$ que vai emitir uma opinião no instante $n$. Esse sorteio é feito uniformemente em $\mathcal{A}$;
- Para decidir que opinião emitir, o ator $A_n$ sorteia uniformemente um de seus influenciadores, isto é, um ator em $\mathcal{V}_{\cdot \to A_n}$, e simplesmente reproduz a última opinião que este influenciador sorteado emitiu até o instante $n-1$.
- As últimas opiniões emitidas por todos os atores diferentes de $A_n$ se mantêm.

# Este novo algoritmo gera uma cadeia com a mesma lei que o primeiro

Com efeito,

$$\mathbb{P}(O_n = +1 \,|\, X_{n-1}, A_n = b) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{V}_{\cdot \to b}} \mathbf{1}\{X_{n-1}(v) = +1\}}{|\mathcal{V}_{\cdot \to b}|} =$$

$$= \frac{U^b_{n-1}(+1)}{|\mathcal{V}_{\cdot \to b}|} = \frac{U^b_{n-1}(+1)}{U^b_{n-1}(+1) + U^b_{n-1}(-1)} = p^b_{n-1}(+1).$$

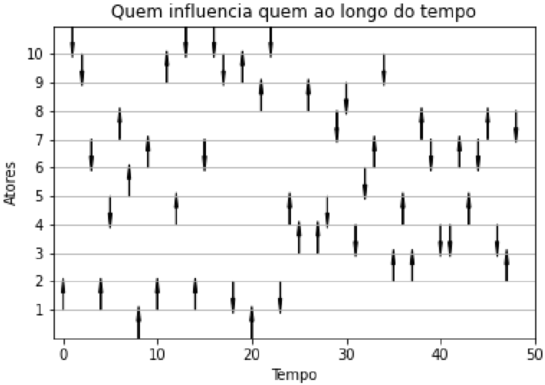
# Qual a vantagem de mudar o algoritmo?!

- Neste novo algoritmo não é necessário calcular as proporções $p_n^a(+1)$ e $p_n^a(-1)$.
- Com efeito, o sorteio da opinião de um influenciador escolhido ao acaso tem exatamente o mesmo efeito.
- Este algoritmo tem um aspecto mais importante: ele nos permite fazer uma busca retrospectiva da origem da última opinião emitida por cada ator até o instante presente.
- E isso nos leva a uma compreensão profunda do comportamento do conjunto de opiniões ao longo do tempo.

# Construção gráfica

- Para simplificar a apresentação vamos nos limitar ao exemplo 1.
- No exemplo 1, $\mathcal{A} = \{1, ..., N\}$ e para todo $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{V}_{\cdot \to a} = \{a-1, a+1\}$ com a convenção $N+1 = 1$.
- Vamos indicar graficamente de quais influenciadores cada um dos atores adota sucessivamente as opiniões ao longo do tempo.
- Para cada instante $n \geq 1$, escolhemos o ator $A_n$ e, dado $A_n$, escolhemos $I_n$ dentre seus influenciadores.
- Representamos isso, colocando uma flecha de $(n, a-1)$ até $(n, a)$ ou de $(n, a+1)$ até $(n, a)$, sempre que $A_n = a$ e $I_n = a-1$ ou $I_n = a+1$, respectivamente.

# Construção gráfica




**Quiz**: Qual a origem da opinião dos atores 4, 5 e 8 no instante 50?

# Questões

1. Nos modelos dos exemplos 1 e 2, com $N = 10$, faça um programa que busque a origem das últimas opiniões de todos os atores emitidas até o instante $T = 100$.
2. No modelo do exemplo 1, com $N = 10$, escolha os valores de $X_0$ aleatóriamente, dando a cada ator a opinião inicial $+1$ ou $-1$, com probabilidades $0.3$ e $0.7$ respectivamente. Simule o sistema e anote o valor da última opinião emitida pelo ator $10$ até o instante $T = 100$. Repita a simulação de forma independente $100$ vezes e calcule a proporção de vezes em que a última opinião emitida pelo ator $10$ até o instante 100 foi $+1$. Faça o mesmo em relação ao ator 5. Que conclusão os resultados obtidos lhe sugerem?

# Questões - continuação

3. Uma questão da maior atualidade é entender a influência que pode ter um robô atuando em uma rede social. No modelo que estamos considerando, um robô é representado por um ator que não se deixa influenciar pelos demais atores e mantem fixada a sua opinião. No modelo do exemplo 1, vamos supor que o ator 5 seja um robô que mantenha uma opinião fixa em $-1$. Simule esse modelo e veja como ele afeta o comportamento sugerido pelos exercícios 1 e 2 desta aula.

# Referência

O modelo que estamos considerando é baseado no Modelo do Votante introduzido em 1975 por Dick Holley e Tom Liggett.

Holley, Richard A.; Liggett, Thomas M. (1975). "Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model". The Annals of Probability. 3 (4): 643–663. doi:10.1214/aop/1176996306