1. TÓPICO 1

1.1. **Introdução. Convergência de Sequências de Eventos.**

Definição 1.1. Em relação a uma sequência de números reais, $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\overline{a} = \limsup a_n$, com

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$$

e definimos o limite inferior de $(a_n)_{n\geq 1}$ ao número real $\underline{a} = \liminf a_n$, com

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Se $\overline{a} = \underline{a} = a$ definimos o valor comum, a, como sendo o limite da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$.

Exemplo 1.2. Assim, se consideramos $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\} = 0$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\} = \sup\{0\} = 0.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} = 0$

Exemplo 1.3. Se consideramos a sequência $a_n = (-1)^n(\frac{n+1}{n})$ temos

$$\overline{a} = \inf_{n\geq 1} \sup\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\inf_{n\geq 1} \sup\{(1+\frac{1}{2n}), (1+\frac{1}{2n+2}), ...\} = \inf\{(1+\frac{1}{2}), (1+\frac{1}{4}), ..., (1+\frac{1}{2n}), ...\} = 1$$

e

$$\underline{a} = \sup_{n\geq 1} \inf\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}), (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n+1}), (-1)^{n+2}(1+\frac{1}{n+2}), ...\} =$$

$$\sup_{n\geq 1} \inf\{-(1+\frac{1}{2n+1}), -(1+\frac{1}{2n+3}), ...\} =$$

$$\sup\{-(1+\frac{1}{3}), -(1+\frac{1}{5}), ..., -(1+\frac{1}{2n+1}), ...\} = -1.$$

Portanto $\overline{a} = 1 \neq -1 = \underline{a}$ e dizemos que o limite não existe.

Observação 1.4. Analiticamente, podemos colocar uma condição necessária e suficiente para que $a = \lim a_n = \lim_{n\uparrow\infty} a_n$ exista:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon.$$

Estamos interessados em estudar o limite de sequências de conjuntos aleatórios (variáveis aleatórias) e devemos fixar um espaço de probabilidade, $(\Omega, \Im, P)$, onde serão definidas as operações de interesse. Resumindo, a probabilidade é uma função de conjuntos e para defini-la em um espaço amostral, Ω, consideramos $\Im$, a classe de todos os eventos de Ω fechada pelas operações de reunião, intersecção, complementar, em um número infinito de eventos. Definimos P em $\Im$ satisfazendo os Axiomas de Kolmogorov:

Definição 1.5.

$$P : \Im \to [0,1]$$
$$A \mapsto P(A)$$

satisfazendo

a) $P(\Omega) = 1$

b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ quando os A_i são disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.

Definição 1.6. Em relação a uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, definimos o limite superior de $(A_n)_{n\geq 1}$ ao conjunto $\overline{A} = \limsup A_n$ com

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

e definimos o limite inferior de $(A_n)_{n\geq 1}$ o conjunto $\underline{A} = \liminf A_n$, com

$$\underline{A} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Se $\overline{A} = \underline{A} = A$ definimos o conjunto A como sendo o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ e denotamos $A = \lim A_n = \lim_{n\uparrow\infty} A_n$.

Se consideramos a sequência de conjuntos $A_n = (\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ temos

$$\underline{A} = \cup_{n\geq 1}\{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \cap (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcap ....\} = \bigcup_{n\geq 1} [0, \frac{n}{n+1}] = [0,1).$$

e

$$\overline{A} = \bigcap_{n\geq 1} \{(\frac{-1}{n}, \frac{n}{n+1}] \bigcup (\frac{-1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \bigcup ....\} = \bigcap_{n\geq 1} (\frac{-1}{n}, 1) = [0,1).$$

Portanto $\underline{A} = \overline{A} = \lim A_n = [0,1)$.

Observação 1.7. Podemos interpretar o limite inferior de uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem a todos os A_n, a menos de um numero finito de índices. O limite superior é o conjunto de elementos que pertencem a um número infinito dos A_n.

Obviamente temos

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

de forma que

$$P(\liminf A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

É conveniente observar as Leis de Morgan:

$$(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k^c,$$

$$(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k)^c = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k^c$$

e portanto, se o limite existe, $(\lim A_n)^c = \lim A_n^c$.

Definição 1.8. Uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ $(A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1)$.

Lema 1.9. *Se a sequência de conjuntos $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente (decrescente), então* $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ $(\lim A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n)$.
Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente, $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \geq 1$ temos

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

e

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

Consequentemente $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é decrescente, então $(A_n^c)_{n\geq 1}$ é crescente, e

$$(\lim A_n)^c = \lim A_n^c = \bigcup_{n\geq 1} A_n^c = (\bigcap_{n\geq 1} A_n)^c$$

e portanto $\lim_{n\uparrow\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n$.

1.2. **Convergência e continuidade de medidas de probabilidades. Lema de Borel Cantelli.**

Observação 1.10. Uma função $f(x)$ definida no conjunto dos números reai a valores reais, é contínua em um número real a se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad se \quad |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uma condição equivalente em termos de sequência de números reais é:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a), \forall (a_n)_{n\geq 1}, \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

isto é

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \quad | \quad se \quad n \geq n_0 \to |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.11. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ. Defina os eventos $A_n = \{X \in [0, \frac{n}{n+1}]\}$. Note que $(A_n)_{n\geq 1}$ é crescente e que $\lim A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \{X \in [0,1)\}$. Portanto

$$P(\lim A_n) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda}.$$

Por outro lado,

$$P(A_n) = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}}$$

e

$$\lim P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{n\lambda}{n+1}} = 1 - e^{-\lambda} = P(\lim A_n).$$

e podemos pensar que a medida de probabilidade é uma função conjuntos, que é contínua. Este fato é verdadeiro.

Teorema 1.12. *Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos em $\Im$, Se o limite da sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ existe, então*

$$P(\lim A_n) = \lim P(A_n).$$

Prova

Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência crescente de eventos, $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Definimos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - A_{n-1}$ de forma que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) =$$

$$P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n - A_{n-1}) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] =$$

$$P(A_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$$

No caso em que a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ *é decrescente,* $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *e* $(A_n^c)_{n\geq 1}$ *é uma sequência crescente de eventos e* $\lim A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c$.

Portanto

$$P(\lim A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) =$$

$$1 - P(\lim A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

No caso geral temos

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \limsup P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq$$

$$\limsup P(A_n) \geq \liminf P(A_n) \geq \liminf P(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim P(\bigcap_{k\geq n} A_k) =$$

$$P(\lim \bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = P(\liminf A_n).$$

Contudo, como por hipótese $\lim A_n$ *existe,* $P(\limsup A_n) = P(\lim A_n) = P(\liminf A_n)$. *Considerando tais igualdades e as desigualdades acima concluimos*

$$P(\lim A_n) = \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n) = \lim P(A_n).$$

Exemplo 1.13. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. Então $P(X = x) = 0, \forall x$.

Considere a sequência decrescente de intervalos, de

$$A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

de forma que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

e

$$P(X \in \{x\}) = P(X \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty} P(X \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(x-\frac{1}{n} < X \leq x+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}[F(x+\frac{1}{n})-F(x-\frac{1}{n})] = F(x^+)-F(x^-) = 0.$$

Exemplo 1.14. Seja X uma variável aleatória. Então ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in N \quad | \quad P(|X| > k) < \varepsilon.$$

Prova

Como X assume valores nos reais, $P(|X| = \infty) = 0$. Considere a sequência decrescente $\{|X| > n\}$, de forma que

$$\{|X| = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}$$

Portanto

$$0 = P(|X| = \infty) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}) = P(\lim_{n\to\infty}\{|X| > n\}) = \lim_{n\to\infty} P(|X| > n).$$

Então, $\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists k \in N \ \ | \ \ se \ \ n \geq k \to P(|X| > n) < \varepsilon$. Em particular tomamos $n = k$.

Exemplo 1.15. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de eventos no espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \Leftrightarrow \forall n, P(A_n) = 1.$$

Prova A condição nescessária é óbvia.

Provemos a condição suficiente por indução em n. Para $n = 2$ a prova é óbvia pois

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \bigcup A_2).$$

Por hipótese de indução, suponha que a prova vale para n, isto

$$\forall m, P(A_m) = 1, 1 \leq m \leq n \Rightarrow P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1.$$

Provemos para $n + 1$: $P(\bigcap_{m=1}^{n+1} A_m) = P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m \bigcap A_{n+1}) = 1$, quando $P(\bigcap_{m=1}^{n} A_m) = 1$ e $P(A_{n+1}) = 1$, o que ocorre, por hipótese de indução quando $P(A_m) = 1, \forall m, 1 \leq m \leq n$.

Consequentemente

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Teorema 1.16. Lema de Borel Cantelli *Seja* $(A_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de eventos no espaço de probabilidade* $(\Omega, \Im, P)$*.Então*

I) Se $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 0.$

II) Se $\sum P(A_n) = \infty$ *e os* A_n *são independentes,*$\Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 1.$

Prova Provemos a parte I.

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

pois $\sum P(A_n) < \infty$. *A desigualdade é devido a Bonferroni.*

Provemos a parte II.

Devemos provar que $P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1$ *que, pelo exemplo , é equivalente provar que* $P(\bigcup_{k\geq n} A_k) = 1, \forall n \geq 1$ *ou seja* $P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0, \forall n \geq 1$.

$$P(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = P(\lim_{m\to\infty}\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \leq$$

$$\lim_{m\to\infty} \pi_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0.$$

Observação 1.17. Observe que, se os eventos são independentes, $P(A_n i.v.)$ é 0 ou 1.

Exemplo 1.18. Contudo, considere o espaço $((0,1)),\Im,P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0,\frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,

$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = 1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Contudo as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Exemplo 1.19. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponecial padrão e seja a variável aleatória $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$. Note que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\frac{X_n}{\ln n} > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon \ln n) = e^{-\ln n^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}$, que converge se $\varepsilon > 1$ $(P(A_n i.v.) = 0)$ e diverge se $\varepsilon \leq 1$ $(P(A_n i.v.) = 1)$

Exemplo 1.20. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

Sejam $A_n = \{X_n \in (0,\frac{1}{n}]\}$ e $B_n = \{X_n \in (0,\frac{1}{n^2}]\}$. Assim $P(A_n) = \frac{1}{n}$ e $P(B_n) = \frac{1}{n^2}$.

$P(A_n iv.) = 1$ pois os A_n são indenpedentes e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, (série harmônica).

$P(B_n iv.) = 1$ pois os B_n são tais que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, (Série de Dirichlet).

1.3. **Convergência quase certa e em probabilidade. Propriedades.**

Definição 1.21. Seja $(\Omega,\Im,P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida em Ω com valores em $\Re$, isto é, para cada $w \in \Omega$, $X(w) \in \Re$, é um número real.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias. Para cada realização w , $(X_n(w))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais que pode (ou não) convergir para um valor real $X(w)$.

Seja

$$N^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\}.$$

Se $P(N^c) = 1$ dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X. Denotamos $X_n \to^{qc} X$.

Observe que $P(N) = 1 - P(N^c) = 0$ e também dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X a menos de um conjunto de medida nula.

Observação 1.22. O limite é único. Suponha que exista uma outra variável aleatória Y, tal que $X_n \to^{qc} Y$, isto é, existe M^c com $P(M^c) = 1$

$$M^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to Y(w)\}.$$

Mas $P(N^c \cap M^c) = 1$ e em $N^c \cap M^c$ temos $X(w) = Y(w)$.

Exemplo 1.23. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, $X \sim U(0,1)$.

Defina

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (1-X)^{k-1}.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-X(w))^{k-1} = \frac{1}{X(w)}$$

com

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \frac{1}{X(w)}) = P(0 < X < 1) = 1$$

e $X_n \to^{qc} \frac{1}{X}$.

Defina

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{5.X}{3})^k.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{5.X(w)}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}},$$

se $\frac{5.X(w)}{3} < 1$, isto é, $X(w) < \frac{3}{5}$. Então

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = Y(w) = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}}) = P(X < \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$$

e $Y_n \nrightarrow^{qc} Y$.

Observação 1.24. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Uma condição equivalente para que $\lim_{n\uparrow\infty} a_n = a$ é

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \varepsilon,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \frac{1}{m}.$$

Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \to^{qc} X$. Então

$$N^c = \{w \quad | \quad \lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = X(w)\} =$$

$$\{w \quad | \quad \forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}.$$

Portanto $P(N^c) = 1$ se, e somente se,

$$P(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

que é equivalente a

$$P(\liminf \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

ou

$$P(\limsup \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Corolário 1.25. *Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, e os eventos*

$$A_k = \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \quad \forall m \geq 1$, então $X_n \to^{qc} X$.
Prova: *Segue do Lema de Borel Cantelli.*

Exemplo 1.26. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \frac{1}{m}) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \frac{1}{m}) = P(X_n > (\ln n)^{\frac{1}{m}}) = e^{-(\ln n)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}.$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} = \infty$ se $m \geq 1$.

Concluimos, pelo lema de Borel Cantelli, que $P(\limsup |Y_n - 0| > \frac{1}{m}) = 1$ and $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Exemplo 1.27. Considere o espaço $((0,1)), \Im, P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,
$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1)) = 1$ e $X_n \to^{qc} 0$.
Contudo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

mas as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Operações com limites

P.1 - Se $X_n \to^{qc} X$ e f é uma função real contínua, então

$$f(X_n) \to^{qc} f(X).$$

Prova:
pois

$$N^c = \{w \in \Omega \mid X_n(w) \to X(w)\} = \{w \in \Omega \mid f(X_n(w)) \to f(X(w))\}$$

e $P(N^c) = 1$.

P.2 - Se $X_n \to^{qc} X$ e $Y_n \to^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \to^{qc} X \pm Y;$$
$$X_n.Y_n \to^{qc} X.Y;$$
$$\frac{X_n}{Y_n} \to^{qc} \frac{X}{Y}, \quad quando \quad bem \quad definida.$$

Prova:
Sejam

$$N_X^c = \{w \in \Omega \mid X_n(w) \to X(w)\} \ e \ N_Y^c = \{w \in \Omega \mid Y_n(w) \to Y(w)\}$$

, com $P(N_X^c) = 1$, $P(N_Y^c) = 1$, o que é equivalente a $P(N_X^c \bigcap N_Y^c)) = 1$.
Se $w \in N_X^c \bigcap N_Y^c)$, temos:

$$(X_n \pm Y_n)(w) \to^{qc} (X \pm Y)(w);$$
$$(X_n.Y_n)(w) \to^{qc} (X.Y)(w);$$

$$(\frac{X_n}{Y_n})(w) \to^{qc} (\frac{X}{Y})(w), \quad quando \quad bem \quad definida.$$

Convergência em probabilidade

Definição 1.28. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Considere a sequência de números $(P(|X_n - X| > \varepsilon))_{n\geq 1}$. Se $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, dizemos que X_n converge em probabilidade para X e denotamos por $X_n \to^P X$.

Observação 1.29. Observe que convergência em probabilidade não é concernente à convergência pontual de $X_n(w)$ para $X(w)$. A interpretação é que, para valores grandes de n, as variáveis aleatórias X_n e X são aproximadamente iguais com probabilidade bem alta.

Observação 1.30. O limite em probabilidade é único: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X, Y variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade, tais que $X_n \to^P X$ e $X_n \to^P Y$. Observe que

$$|X - Y| = |X - X_n + X_n - Y| \leq |X_n - X| + ||X_n - Y|$$

e portanto

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Temos que

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - X| > \frac{\varepsilon}{2})$$

Então $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = \lim_{n\uparrow\infty} P(|X - Y| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Portanto $\forall \varepsilon > 0$ temos $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$ e $P(X = Y) = 1$.

Exemplo 1.31. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \varepsilon) = P(X_n > (\ln n)^{\varepsilon}) = e^{-(\ln n)^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$ e $Y_n \to^P 0$.
Contudo
$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = \infty$ se $\varepsilon \leq 1$.

Como o Y_n são independentes concluimos que pelo Lema de Borel Cantelli que

$$P(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 1$$

e $Y_n \to^P 0$ mas $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Teorema 1.32. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$. Então $X_n \to^P X$.*
Prova:
Se $X_n \to^{qc} X$, então

$$P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\{w \;\mid\; |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$P(\lim_{n\uparrow\infty}\bigcup_{k\geq n}\{w \;\mid\; |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(\bigcup_{k\geq n}\{w \;\mid\; |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Como

$$0 \leq P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) \leq P(\bigcup_{k\geq n}\{w \;\mid\; |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}), \quad \forall m \geq 1$$

temos $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) = 0 \forall m \geq 1$ *e* $X_n \to^P X$.

No exemplo 1.11 observamos que a condição suficiente do teorema não vale. Pode-se provar que se $X_n \to^P X$, existe uma subsequência de $(X_n)_{n\geq 1}$, digamos $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $X_{n_k} \to^{qc} X$. Para provar tal fato usaremos o seguinte lema:

Lema 1.33. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n) \leq \delta_n$ para alguma sequência não negativa $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ com $\lim_{n\uparrow\infty} \varepsilon_n = 0$ e alguma sequência $(\delta_n)_{n\geq 1}$, com $\Sigma_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$, então, $X_n \to^{qc} X$.*
Prova:
Por hipótese temos

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$$

e pelo Lema de Borel Cantelli concluimos que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n, \;\; iv) = 0$. Seja $N = \{|X_n - X| \geq \varepsilon_n, \;\; iv\}$, então $P(N) = 0$.
Se $w \in N^c$, $\;\exists n(w) \in \aleph, \;\mid\; \forall n \geq n(w), |X_n - X| \leq \varepsilon_n$. Como $P(N^c) = 1$ e $\lim_{n\uparrow\infty} \varepsilon_n = 0$, temos $X_n \to^{qc} X$.

Teorema 1.34. *Sejam* $(X_n)_{n\geq 1}$, *uma sequência de variáveis aleatórias e* X *uma variável aleatória tal que* $X_n \to^P X$. *Então existe uma subsequência de* $(X_n)_{n\geq 1}$, *digamos* $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ *tal que* $X_{n_k} \to^{qc} X$.
Prova:
Por hipótese $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$. *Portanto*

$$\forall \frac{1}{2^k} > 0, \quad \exists n_o(k), \quad | \quad se \quad n \geq n(k) \to P(|X_n - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k},$$

em particular $P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$.
Assim, para provar o teorema tomamos $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $\delta_k = \frac{1}{2^k}$ *e aplicarmos o lemma 1.13.*

Exemplo 1.35. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$. Então $Y_n \to^P 0$ pois

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, ..., X_n > \varepsilon) =$$

$$\pi_{i=1}^n P(X_i > \varepsilon) = \pi_{i=1}^n (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Operações com limites

P1 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, X uma variável aleatória tal que $X_n \to^P X$ e g uma função real contínua. Então $g(X_n) \to^P g(X)$.
Prova:
Para a prova, usaremos o fato provado : Se X é uma variável aleatória, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe k tal que $P(|X| > k) < \varepsilon$.

Se g é contínua, então

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad | \quad se \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \to \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Em um intervalo fechado, g é uniformemente contínua e δ não depende de ε. Portanto

$$\{|g(X_n) - g(X)| < \varepsilon\} \supset \{|X_n - X| < \delta\} \bigcap \{|X| \leq k\}\}$$

e

$$\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \delta\} \bigcap \{|X| > k\}\}$$

e

$$P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \delta) + P(|X| > k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

P2 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n \pm Y_n \rightarrow^P X \pm Y$.

Prova:

Da desigualdade modular temos

$$|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| = |(X_n - X) \pm (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

de forma que

$$\{|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

e

$$P(|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow o,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

P3 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n.Y_n \rightarrow^P X.Y$.

Prova:

A prova terá três partes:

A) Se a e b são constantes tais que $X_n \rightarrow^P a$ e $Y_n \rightarrow^P b$, então $X_n.Y_n \rightarrow^P a.b$, pois

$$\frac{X_n.Y_n = (X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2}{4} \rightarrow^P \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = a.b.$$

B) Se $X_n \rightarrow^P X$ e Y é uma variável aleatória, então $X_n.Y \rightarrow^P X.Y$.

Relembro o resultado do exercício 1.5 da aula 2: Seja Y uma variável aleatória, então

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k > 0 \quad | \quad P(|Y| > k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto $P(|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon) =$

$$P(\{|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon\} \bigcap \{|Y| > k\}) + P(\{|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon\} \bigcap \{|Y| \leq k\}) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(\{|X_n - X|.|Y| > \varepsilon)\} \bigcap \{|Y| \leq k\}) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para n grande.

C) Como $X_n - X \rightarrow^P 0$ $Y_n - Y \rightarrow^P 0$, temos pela parte A) que $(X_n - X).(Y_n - Y) \rightarrow^P 0$. Contudo $X_n.Y_n - x.Y_n - X_n.Y + X.Y = (X_n - X).(Y_n - Y) \rightarrow^P 0$, $X.Y_n \rightarrow^P X.Y$ e $X_n.Y \rightarrow^P X.Y$ temos o resultado que $X_n.Y_n \rightarrow^P X.Y$.

1.4. **Exercícios.** 1) Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \exp[-(x-\theta)], \quad se \quad x \geq \theta \quad 0 \quad se \quad x < \theta$$

e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X.

a) Qual o limite em probabilidade de

$$\min\{X_1, ..., X_n\} - \theta?$$

b) Qual o limite quase certo de $\min\{X_1, ..., X_n\}$?

2) Seja X uma variável aleatória com função de distribuição absolutamente contínua F e seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a X. Defina $Y_n = n[1 - F(M_n)]$, onde $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

a) Qual a função de distribuição $G_n(y)$ de Y_n?

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} G_n(y)$.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $E[X_n]$ converge para a constante c e $Var(X_n)$ converge para 0 quando n converge para ∞. Prove que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para c.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Prove que $\max\{X_1, ..., X_n\}$ converge em probabilidade para θ.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Mostre que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em probabilidade para 0 mas não converge quase certamente.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Prove que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente e ache o limite X. Mostre que $E[X_n^k]$ não converge para $E[X^k]$ para $k = 1, 2, 3, ...$

7) Verifique, nos casos abaixo, se a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ converge. Em caso afirmativo, qual o tipo de convergência e qual a distribuição limite:

a) $X_n = \log\{\frac{1}{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}}\}$, onde $X \sim U(01)$.

b) $X_n = \sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{2} - X|^{k-1}$, onde $X \sim U(0, 2)$.

c) $X_n = Y_n.Y_{n+1}$ onde $(Y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias com $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$ e $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

8) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com segundo momento finito. Defina

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i.$$

Calcule $E[X_1]$ e use a desigualdade de Chebyschev para provar que $Y_n \to^P E[X_1]$.

9) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com segundo momento finito. Defina

$$Z_n = (\pi_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Prove que $Z_n \to^P c$ e descubra o valor de c.

1.5. **Leis dos Grandes Números.** Consideremos a variável aleatória X que representa o valor numérico de um experimento aleatório e seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, isto é, cópias i.i.d. de X, de tamanho n, grande. A Lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos n valores observados é aproximadamente igual à média de $X, \mu = E[X]$, quando n é grande, isto é

$$\overline{X_n}(w) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} \to_{n\to\infty} \mu$$

onde $w = (w_1, ..., w_n), X_n(w) = X(w_n)$, w_n são os ensaios sucessivos e w é o experimento composto.

Exemplo 1.36. Considere que nas repetições independentes de um experimento estamos interessados nas ocorrências de um evento A . Definimos a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$

$$X_n = 1 \;\; se \;\; A \;\; ocorreu \;\; na \;\; n - es \;\; realizacão; \;\; X_n = 0 \;\; c.c.$$

Desta maneira $P(X_n = 1) = P(A)$. Na n-ésima repetição do experimento calculamos a frequência relativa do evento A, isto é

$$F_n = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} X_i}{n} \to_{qc} P(A) = E[X_n].$$

O exemplo justifica o conceito frequêntista de probabilidade.

Se a convergência é quase certa dizemos que a Lei é Forte, se a convergência é em probabilidade dizemos que a Lei é Fraca. Claramente, a Lei Forte implica a Lei Fraca dos Grandes Números.

A Lei Fraca dos Grandes Números

Para provarmos a Lei Fraca dos Grandes Números usaremos a Desigualdade de Markov:

Lema 1.37. *Seja X uma variável aleatória. Para todo ε e r, números reais positivos com $E[|X|^r] < \infty$, temos*

$$P(|X| \geq \varepsilon) > \frac{E[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

Prova:

$$E[|X|^r] = \int_{-\partial}^{\infty} |x|^r dF(x) = \int_{\{|X|>\varepsilon\}} |x|^r dF(x) + \int_{\{|X|\leq\varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq$$

$$\int_{\{|X|>\varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq |\varepsilon|^r \int_{\{|X|>\varepsilon\}} dF(x) = |\varepsilon|^r P(|X| \geq \varepsilon).$$

Corolário 1.38. *Desigualdade de Tchebyshev. Se X uma variável aleatória com média $E[X] = \mu$ e variância $\sigma^2 < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$ temos*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Prova: *Segue da desigualdade de Markov*

Teorema 1.39. *Lei Fraca dos Grandes Números de Tchebyshev*

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova: *Segue da desigualdade de Tchebyshev, desde que $E[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}] = \mu$ e $Var(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}) = \frac{\sigma^2}{n}$.*

Teorema 1.40. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias não correlacionadas.*

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, isto é, $cov(X_i, X_j) = 0, \forall i, j$, com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova:

Sabemos que $E[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}] = \mu$.

$$Var(\overline{X_n}) = E[(\overline{X_n} - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{n})^2] =$$

$$\frac{1}{n^2} E[(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu)^2] = \frac{1}{n^2} E\{[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)].[\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)]\} =$$

$$\frac{1}{n^2} E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i<j}^{n}(X_i - \mu).(X_j - \mu)] = \frac{1}{n^2}\{\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] +$$

$$\sum_{i<j}^{n} E[(X_i - \mu).(X_j - \mu)]\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Assim, pela Desigualdade de Tchebyshev

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = P((\overline{X_n} - \mu)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E[(\overline{X_n} - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Na realidade, somente é necessário que os X_i's sejam não correlacionados assintóticamente no sentido: $\lim_{|i-j|\to\infty} cov(X_i, X_j) = 0$.

Teorema 1.41. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias assintóticamente não correlacionadas.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias assintóticamente não correlacionadas, com média comum* μ *e variâncias* $Var(X_i) = \sigma_i^2 < c$*, uniformemente limitadas por uma constante* c*. Então*

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova: *Pela desigualdade de Tchebyshev temos*

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > o.$$

Portanto é suficiente provar que $\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X_n}) = 0$.

Pela desigualdade de Schwarz temos que $\forall i, j$,

$$|cov(X_i, X_j)| = |E[(X_i - \mu).(X_j - \mu)]| \leq$$

$$\sqrt{E[(X_i - \mu)^2].E[(X_j - \mu)^2]} = \sigma_i \sigma_j \leq c.$$

Como $\lim_{|i-j|\to\infty} cov(X_i, X_j) = 0$ *temos que*

$$\forall \delta > 0, \quad \exists m \in \aleph \quad | \quad se \quad |i-j| > m \to |cov(X_i, X_j)| < \frac{\delta}{2}.$$

Sabemos que

$$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) \leq$$

$$\frac{1}{n^2}[\sum_{|i-j|\leq m} nc + \sum_{|i-j|>m} |cov(X_i, X_j)|] \leq$$

$$\frac{n.m.c}{n^2} + \frac{n(n-m)\delta}{2n^2} \leq \delta, \quad para \quad n \geq \frac{2mc}{\delta}.$$

Teorema 1.42. *Lei Fraca dos Grandes Números de Khintchin, para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média finita.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com* $E[X_1] = \mu < \infty$*.Então*

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova:

Devemos provar que $\forall \varepsilon > 0$ *e* $\forall \delta > 0$, $P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \delta$.

Sejam $\gamma = E[|X|]$ *e* $\alpha = \frac{\delta.\varepsilon^2}{12.\gamma}$. *Defina a sequência de variáveis aleatórias* $(Y_n)_{n\geq 1}$

$$Y_n = X_n \quad se \quad -\alpha.n \leq X_n \leq \alpha.n \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Então os Y_n*'s são independentes com médias* $\mu_n = \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} y dF(y)$ *e variância* $\sigma_n^2 = \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} y^2 dF(y) - \mu_n^2$.

Claramente, se $n \to \infty$, $\alpha.n \to \infty$ *e* $\mu_n \to \mu$,*isto é*

$$\exists n_0 \ \ | \ \ \forall n \geq n_0, \to |\mu_n - \mu| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = P(|\overline{X_n} - \mu_n + \mu_n - \mu| > \varepsilon) \leq P(|\mu_n - \mu| > \frac{\varepsilon}{2}) +$$

$$P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq$$

$$P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}, \overline{X_n} = \overline{Y_n}) + P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}, \overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) \leq$$

$$P(|\overline{Y_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}).$$

Note que

$$\sigma_n^2 \leq \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} y^2 dF(y) \leq \alpha.n \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} |y| dF(y) \leq \alpha.n.\gamma$$

e pela desigualdade de Tchebyshev temos

$$P(|\overline{Y_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{4\sigma_n^2}{n\varepsilon^2} = \frac{4.\alpha.\gamma}{\varepsilon^2} = \frac{\delta}{3}, \quad para \quad \alpha = \frac{\delta.\varepsilon^2}{12.\gamma}.$$

Em adição temos

$$P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) = \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq Y_k) = n.P(|X_1| \geq n.\alpha)$$

$$\leq n \int_{|X| > \alpha.n} dF(x) \leq \alpha^{-1} \int_{|X| > \alpha.n} |x| dF(x) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Assim $\exists n_1 \ \ | \ \ P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) \leq \frac{\delta}{3}, \quad se \quad n \geq n_1$.

Tomando $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, *temos* $P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \delta$.

A Lei Forte dos Grandes Números

Teorema 1.43. *Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independente e identicamente distribuidas com média finita e existência do quarto momento central.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com* $E[|X_1|] = \mu < \infty$ *e* $E[(X-\mu)^4] = \gamma < \infty$*.Então*

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^{qc} \mu.$$

Prova:

Observe que

$$E[(\overline{X_n}-\mu)^4] = E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^{n} X_i - n.\mu)^4] = E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^4)] =$$

$$\frac{1}{n^4}E\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^4 + \sum_{i<j}(X_i-\mu)^3.(X_j-\mu)$$

$$+\sum_{i<j}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu)^2 + \sum_{i<j<k}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu).(X_k-\mu)$$

$$+\sum_{i<j<k<l}(X_i-\mu).(X_j-\mu).(X_k-\mu).(X_l-\mu)\} =$$

$$\frac{1}{n^4}\{\sum_{i=1}^{n}\gamma + \sum_{i<j}0 + \sum_{i<j}\sigma^2\sigma^2 + \sum_{i<j<k}0 + \sum_{i<j<k<l}0\} =$$

$$\frac{1}{n^4}\{n\gamma + n.(n-1)\sigma^4\} = \frac{\gamma}{n^3} + \frac{(n-1)\sigma^4}{n^3} \leq \frac{\gamma}{n^3} + \frac{\sigma^4}{n^2}.$$

Portanto, pela desigualdade de Markov temos

$$P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) = P((\overline{X_n}-\mu)^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E[(X-\mu)^4]}{\varepsilon^4} \leq \frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}$$

e

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}) < \infty.$$

Pelo Lema de Borel Cantelli concluimos que

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to^{qc} \mu.$$

Observação 1.44. Observe que

$$(X-\mu)^4 = X^4 - 4.X^3.\mu + 6.X^2.\mu^2 - 4.X.\mu^3 + \mu^4$$

e

$$E[(X-\mu)^4] = E[X^4] - 4.\mu.E[X^3] + 6.\mu^2.E[X^2] - 4.\mu^3.E[X] + \mu^4.$$

Exemplo 1.45. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $p, 0 < p < 1$, então $E[X^k] = p, \forall k$ e

$$E[(X-\mu)^4] = p - 4p^2 + 6P^3 - 4P^4 + p^4 < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} p$.

Exemplo 1.46. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, então

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

e

$$E[(X-0,5)^4] = E[X^4] - 4.0,5.E[X^3] + 6.0,25.E[X^2] - 4.0,125.E[X] + 0,0625 =$$

$$0,2 - 0,5 + 0,5 - 0,25 + 0,0625 = 0,0125 < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} 0,5$.

Exemplo 1.47. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro λ então

$$EX^k] = \frac{k!}{\lambda^k} \int_0^\infty \frac{x^k \lambda^{k+1} e^{-\lambda x}}{k!} dx = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

e

$$E[(X-\frac{1}{\lambda})^4] = \frac{4!}{\lambda^4} - 4.\frac{1}{\lambda}\frac{3!}{\lambda^3} + 6.(\frac{1}{\lambda})^2 \frac{2!}{\lambda^2} - 4.(\frac{1}{\lambda})^3.\frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{\lambda})^4 = \frac{9}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4} < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} \frac{1}{\lambda}$.

Exemplo 1.48. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, então $E[(X-\mu)^{2n+1}] = 0$ e $E[(X-\mu)^{2n}] = \sigma^{2n}.[(2n-1).(2n-3)....3.1]$. Assim $E([(X-\mu)^4] = 3.\sigma^4$ e $\overline{X_n} \to^{qc} \mu$.

Exemplo 1.49. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X, com $E[(X-\mu)^4] = \gamma < \infty$ e $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$. Então

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n}}{n-1} \to^{qc} \sigma^2.$$

Note que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2)$.
Por outro lado, pela Lei forte dos grandes números,

$$\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{n-1}\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc} 1.E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2 \rightarrow^{qc} 1.\mu^2 = \mu^2$$

pois x^2 é uma função contínua de x.

Recordemos P.2 - Se $X_n \rightarrow^{qc} X$ e $Y_n \rightarrow^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \rightarrow^{qc} X \pm Y.$$

Portanto

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2) \rightarrow^{qc} (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

Em termos estatísticos estamos provando que S_n^2 é um estimador consistente para σ^2, pois a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade.

No que segue as Leis Fortes de Kolmogorov são enunciadas. O leitor encontrará as provas respectivas provas no livro Probabilidade: um curso em nível intermediário; Barry, R. James.

Teorema 1.50. *Primeira Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e integráveis e suponha que

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Então

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{E[X_1] + ... + E[X_n]}{n} \rightarrow^{qc}$$

Teorema 1.51. *A Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuidas e integráveis com $E[X_n] = \mu$. Então

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \rightarrow^{qc} \mu.$$

Exemplo 1.52. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. comm função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-x+\theta} \quad se \quad x \geq \theta \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Prove que $\frac{X_1+...+X_n}{n} \rightarrow^{P} 1+\theta$.

Observe que

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \int_0 2^{\infty}(y+\theta)e^{-y}dy = 1+\theta.$$

Pela Lei Fraca dos Grandes números concluimos o exercício.

Exemplo 1.53. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. seja $Z_n = (\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}$, a média geométrica de $X_1, ..., X_n, 1 \leq n < \infty$. Mostre que $Z_n \to k$. Qual o valor de k?

Observe que $-\ln Z_n = -\ln[(\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}] = \frac{\sum_{i=1}^n -\ln X_i}{n}$ e que $-\ln X_i$ tem distribuição exponencial padrão. Portanto, pela Lei Fraca dos Grandes Números, $-\ln Z_n \to^P 1$.

Como a função exponencial, a inversa da função logaritmo neperiano, é contínua, concluimos que $Z_n \to^P e$.

Exemplo 1.54. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com $E[X_1] = Var(X_1) = 1$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}} \to^{qc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Observe que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}{\sqrt{\frac{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2}}}.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números temos $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{qc} 1$ e $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc} 2$.

A convergência quase certa é fechada por quocientes (quando possível) e a raiz quadrada é função contínua.

Exemplo 1.55. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Qual o limite quase certo de

$$\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2}{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}}$$

1.6. **Exercícios.** 1) Arredonda-se vinte números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3.

2) Lança-se uma moeda equilibrada até observar 100 caras. Determine a probabilidade de que sejam necessários, no mínimo, 226 lançamentos.

3) Se X uma variável aleatória com distribuição de Cauchy padrão, defina

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{|X|}{1+|X|})^k, \quad n \geq 1.$$

Calcule, se existir, $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$.

4) Seja X_n uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_n(t) = \frac{n}{4(n-1)} 1_{(-1,\frac{-1}{n})}(x) + \frac{3n}{4(n-1)} 1_{(\frac{1}{n},1)}(x).$$

a) Obtenha a função característica de X_n, $\psi_n(t)$.

b) Calcule $\lim \psi_n(t)$. O limite é uma função característica? Justifique.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas. Qual o limite em distribuição de

$$\sqrt{n}(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}),$$

onde $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ e $S_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n}$.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição de Poisson de parâmetro $\sqrt{n}$. Verifique se $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ converge quase certamente.

7) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Calcule o limite em probabilidade de $\frac{\sum_{k=1}^n -\log X_k}{n}$.

1.7. **Convergência em distribuição e propriedades.**

Exemplo 1.56. Uma variável aletória Y é definida como degenerada se $Y = \theta$ com probabilidade 1 (θ: número real)

A sua função de distribuição é

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases}$$

Exemplo 1.57. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ iid com distribui cão uniforme no intervalo $(0, \theta)$
, isto é, $X_1 \sim U(0, \theta)$ e defina $(Y_n)_{n\geq 1}$ por
$Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots\}$. Portanto

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y)^n = \begin{cases} 0 \text{ se } y < 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \text{ se } 0 \leq y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases} = F_Y(y).$$

que é uma função de distribuição

Exemplo 1.58. Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $P(Y_n = n) = 1$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < n \\ 1 \text{ se } y \geq n \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = 0, \text{ que não é uma função de distribuição.}$$

Exemplo 1.59. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ tais que $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$

Observe que $X_n \overset{qc}{\Rightarrow} 0$ e $X_n \overset{P}{\Rightarrow} 0$ A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{que não é função de distribuição}$$

contudo

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{é função de distribuição.}$$

Tais considerações motivam a seguinte definição

Definição 1.60. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e F uma função de distribuição tal que, para todo número real x em que F é contínua em x, temos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Então dizemos que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição para F. $F_n \to^D F$.

Se X_n é v.a. com função de distribuição F_n e X é v.a. com função de distribuição F e $F_n \to^D F$, dizemos também que $X_n \to^D X$.

Teorema 1.61. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) com funções de distribuições absolutamente contínuas com funções de densidade de probabilidade $f_n(x)$.*

Seja X v.a. com função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade $f(x)$.

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)),$$

então

$$F_n \to^D F.$$

Prova: *Primeiramente lembramos que se $f_n(x)$ é uniformemente contínua, então $\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$.*

Sejam $F_n(y)$ e $F(y)$ as funções de distribuições de X_n e X, respectivamente. Então

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{y} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} f_n(x)dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} f(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx = F(y).$$

Exemplo 1.62. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim U\left(0, 1-\frac{1}{n}\right)$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-1/n} & \text{se} \quad 0 < x < 1-\frac{1}{n} \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \quad cc \end{cases}$$

é a função densidade de uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Assim $F_n \to^D F$ e $X \sim U(0,1)$.

Teorema 1.63. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas que assumem valores no conjunto dos números naturais*

$$P(X_n = k) = p_n(k),\ k = 0, 1, \dots$$

e seja X uma v.a. que também assume valores em $\mathbb{N}$

$$\text{com } P(X_n = k) = p(k),\ k = 0, 1, \dots$$

Então $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ se e só se $F_n \to^D F$.

Prova: *Observe que a função de distribuição de X_n é $F_n(y) = \sum_{k\leq[y]} p_n(k)$ e a função de distribuição de X é $F(y) = \sum_{k\leq[y]} p(k)$. Portanto*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq[y]} p_n(k) =$$

$$\sum_{k\leq[y]} \lim_{n\to\infty} p_n(k) = \sum_{k\leq[y]} p(k) = F(y).$$

e a condição é necessária. (A segunda igualdade acima é devido ao teorema da convergência dominada).

Por outro lado, a condição é suficiente pois:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \lim_{n\to\infty} (F_n(k) - F_n(k^-)) = F(k) - F(k^-) = p(k).$$

Observação 1.64. Se os valores de X_n não forem isolados o teorema pode não valer: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas com $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ e X uma variável aleatória com $P(X = 0) = 1$. A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e a função de distribuição de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 1 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

de maneira que $X_n \to^D X$. Mas $P_n(0) = 0$ e $p(0) = 1$ de maneira que $p_n(k) \nrightarrow p(k)$.

Exemplo 1.65. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n : 1, 2, 3, \dots, n$
com

$$P(X_n = k) = \frac{a}{2^k}$$

O valor de a é definido por:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{2^k} = a\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2^n}} = a\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \therefore a = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$$

Portanto

$$P(X_n = k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \frac{1}{2^k}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \frac{1}{2^k} \quad k \in \mathbb{N}$$

Observe que $X : 1, 2, \ldots$, isto é, o suporte de X é $\mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \;\; e \;\; X_n \to^D X.$$

Teorema 1.66. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $X_n \to^P X$ então $X_n \to^D X$.*

Prova:

F_n : função de distribuição de X_n
F : função de distribuição de X
x : ponto de continuidade de F

$$\{X \leq X_n + \epsilon\} \;\; ou \;\; \{X > X_n + \epsilon\} \;\; é \; verdade.$$

Em $\{X_n \leq x\}$ temos $\{X \leq x + \epsilon\}$ ou $\{X - X_n > \epsilon\}$

$$\{X_n \leq x\} \subset \{X \leq x + \epsilon\} \; ou \; \{|X - X_n| > \epsilon\}$$

$$P\left(X_n \leq x\right) \leq P\left\{X \leq x + \epsilon\right\} + P\left\{|X - X_n| > \epsilon\right\}$$

$$F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P\left\{|X - X_n| > \epsilon\right\}. \tag{1}$$

Com argumento semelhante

$$\{X_n \leq X + \epsilon\} \;\; ou \;\; \{X_n > X + \epsilon\} \; é \; verdade.$$

Em $\{X \leq x - \epsilon\}$ *temos* $\{X_n \leq x\}$ *ou* $\{X_n - X > \epsilon\}$

$$\{X \leq x - \epsilon\} \subset \{X_n \leq x\} \cup \{|X_n - X| > \epsilon\}$$

$$P\{X \leq x - \epsilon\} \leq P\{X_n \leq x\} + P\{|X_n - X| > \epsilon\}$$

$$F(x - \epsilon) \leq F_n(x) + P\{|X_n - X| > \epsilon\}. \tag{2}$$

Combinando (1) *e* (2) *temos*

$$F(x - \epsilon) - P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leq F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P\{|X_n - X| > \epsilon\}$$

fazendo $n \to \infty$

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$$

como x *é ponto de continuidade, fazendo* $\epsilon \to 0$

$$F(x) \leq \lim F_n(x) \leq F(x).$$

Exemplo 1.67. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias identicamente distribuídas como X, em que

$X/\ X_n$	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Assim $X_n \to^D X$ pois X_n e X tem mesma função de distribuição.
Contudo ($\epsilon < 1$),

$$P\{|X_n - X| > \epsilon\} = P\{|X_n - X| = 1\}$$

$$= P\{X_n = 0 \text{ e } X = 1\} + P\{X_n = 1 \text{ e } X = 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \nrightarrow 0$$

$$\therefore \quad X_n \nrightarrow^P X$$

.

Assim convergência em distribuição não implica convergência em probabilidade.
Contudo temos o teorema

Teorema 1.68. *Sejam* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias e* k *uma constante. Se* $X_n \to^D k$ *então* $X_n \to^P k$.

Prova:

$$(\textit{hipótese}) \ \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \geq k \\ 0 \ se \ x < k \end{cases}$$

Contudo ($\epsilon < 1$),

$$P\{|X_n - k| \leq \epsilon\} = P\{k - \epsilon \leq X_n \leq k + \epsilon\} \geq$$

$$= P\{k - \epsilon < X_n \leq k + \epsilon\} = F_n(k + \epsilon) - F_n(k - \epsilon).$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - k| \leq \epsilon\} \geq$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(k + \epsilon) - \lim_{n\to\infty} F_n(k - \epsilon) = 1 - 0 = 1.$$

Teorema 1.69. Teorema de Slutsky
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ *e* $(Y_n)_{n\geq 1}$, X, *v.a.(s) tais que* $X_n \to^D X$, $Y_n \to^P k$ *então:*

(1) $X_n \pm Y_n \to^D X \pm k$
(2) $X_n Y_n \to^D kX$
(3) *Se* $k \neq 0$ *e* $P(Y_n \neq 0) = 1$

$$\frac{X_n}{Y_n} \to^D \frac{X}{k}$$

Exemplo 1.70. Seja $(Z_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) tais que

$$P(Z_n = n) = \frac{1}{n} \qquad\qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Será que Z_n converge em distribuição ?

Exemplo 1.71. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ iid com distribuição $U(0,1)$. Seja $Y_n = n \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Qual o limite em distribuição de Y_n?

Exemplo 1.72. Qual o limite em distribuição de $Z_n + Y_n$ onde Z_n e Y_n são como acima?

Exemplo 1.73. $X_1, X_2, \ldots$, v.a.(s) com funções de distribuição dadas por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < -n \\ \frac{x+n}{2n} \text{ se } -n \leq x < n \\ 1 \text{ se } x \geq n \end{cases}$$

$X_n \overset{D}{\Rightarrow} ?$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{2n} + \frac{n}{2n}\right) = \frac{1}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

consequentemente não é função de distribuição e X_n não converge em distribuição.

Exemplo 1.74. Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ v.a.(s) iid $N(0,1)$ e $Y_n = \bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. $Y_n \to^D$?

Exemplo 1.75. Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ v.a.(s) iid $N(0,1)$

$$U_n = \left\{ \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \ldots, + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}} \right\} \text{(para todo n par) e } V_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots X_n^2.$$

Defina $Z_n = \frac{U_n}{V_n}$. Z_n converge em distribuição?
Obs: $\frac{X_1}{X_2}$ tem distribuição de $Cauchy(0,1)$.

1.8. **Funções Características.**

Se a e b são constantes reais, $z = a + ib$, onde $i = \sqrt{-1}$ define um número complexo. O conjugado de z $\overline{z} = a - ib$. O produto $z\overline{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ define a norma de z.

Se uma função real tem expansão em série de potência com raio de convergência positivo, podemos usar série de potência para definir uma função de variável complexa.

O desenvolvimento de Taylor, em torno de um ponto a, de uma função $g(\cdot)$ infinitamente diferenciável é

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

O desenvolvimento da função exponencial, $g(t) = e^t$, em torno do ponto 0 é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

e definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

para qualquer número complexo z. Temos $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2. em particular se $z = e^{it}$

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!}\dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = cos(t) + isen(t).$$

Observe que se $f(t) = cos(t)$ então $f(0) = 1$,

$$\begin{array}{cccc} f'(t) = -sen(t) & f''(t) = -cos(t) & f'''(t) = sen(t) & f^{(4)}(t) = cos(t) \\ f'(0) = 0 & f''(0) = -1 & f'''(0) = 0 & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

e a série de Taylor em torno do ponto 0 é

$$cos(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)$$

assim

$$cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{e} \qquad sen(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Temos também que

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it}e^{-it}} = \sqrt{(cos(t) + isen(t))(cos(t) - isen(t))} = \sqrt{cos^2(t) + sen^2(t)} = 1.$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções de t a valores reais então $h(t) = f(t) + ig(t)$ define uma função complexa em t com $h'(t) = f'(t) + ig'(t)$.

Exemplo 1.76.

$$e^{zt} = e^{at+ibt}.$$

Exemplo 1.77.

$$\begin{aligned}
\left(e^{zt}\right)' &= \left(e^{at+ibt}\right)' = \left(e^{at}e^{ibt}\right)' = \left(e^{at}(cos(bt) + isen(bt))\right)' = \left(e^{at}cos(bt) + ie^{at}sen(bt)\right)' \\
&= \left(ae^{at}cos(bt) - be^{at}sen(bt)\right) + i\left(ae^{at}sen(bt) + be^{at}cos(bt)\right) \\
&= e^{at}\left[a(cos(bt) + isen(bt)) + ib(cos(bt) + isen(bt))\right] \\
&= e^{at}\left[(a+ib)e^{ibt}\right] = (a+ib)e^{at+ibt} = ze^{zt},
\end{aligned}$$

ou seja, $\left(e^{zt}\right)' = ze^{zt}$.

Exemplo 1.78.

$$\left(e^{it}\right)' = ie^{it}.$$

Se $\int_a^b f(t)dt$ e $\int_a^b g(t)dt$ existem, temos $\int_a^b h(t)dt = \int_a^b f(t)dt + i\int_a^b g(t)dt$.

$$\int_a^b e^{zt}dt = \left.\frac{e^{zt}}{z}\right|_a^b = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z},$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Como consequência,

$$\int_a^b e^{it}dt = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{it}dt &== \int_a^b cos(t) + isen(t)dt = \int_a^b cos(t)dt + i\int_a^b sen(t)dt \\
&= sen(t)|_a^b - i\,cos(t)|_a^b = (sen(b) - sen(a)) - i(cos(b) - cos(a)) \\
&= \frac{cos(b) - cos(a) + isen(b) - isen(a)}{i} = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.
\end{aligned}$$

Se X e Y são variáveis aleatórias (reais), podemos escrever uma v.a. complexa como $Z = X + iY$.

Definição 1.79.

$$E[Z] = E[X] + iE[Y],$$

sempre que $E[X]$ e $E[Y]$ estão bem definidas. Z tem esperana finita se e só se $E[Z] < \infty$ e neste caso $|E[Z]| \leq E[|Z|]$.

$$E[a_1 Z_1 + a_2 Z_2] = a_1 E[Z_1] = a_2 E[Z_2],$$

é válida onde a_1 e a_2 so números complexos e Z_1 e Z_2 so variáveis aleatórias complexas com esperanças finitas.

Definição 1.80. Seja X uma v.a. (real), $t \in \mathbb{R}$, ento $|e^{itX}| = 1$ e $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$, $-\infty < t < \infty$ existe.
Definiremos a função característica de X por $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$. Note que:

P1: $\varphi_X(0) = 1$

$$|\varphi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = E[1] = 1.$$

P2: Se X degenerada em θ, isto é, $P(X = \theta) = 1$, temos

$$\varphi_X(t) = e^{it\theta},$$

se $\theta = 0$ então $\varphi_X(t) = 1$.

P3: X é simétrica, em torno de 0, se $f(x) = f(-x)$

$$P(X \leq x) = P(X \geq -x) = P(-X \leq x) \leftrightarrow X =^D -X$$

então

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E[e^{itX}]} = E[cos(tX) - isen(tX)] = E[cos(t(-X)) + isen(t(-X))]$$

$$= \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t) \leftrightarrow \text{ a parte imaginária é zero.}$$

Portanto X é simétrica em torno de zero se e só se $\varphi_X(t)$ é real.

P4: Se X uma v.a. e a, b são constantes reais, então

$$\varphi_{a+bX}(t) = E[e^{it(a+bX)}] = e^{ita} E[e^{itbX} = e^{ita} \varphi_X(tb)$$

Exemplo 1.81. Se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.e^{-(\lambda - it)x}|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Observe que $\lim_{x \to \infty} e^{-(\lambda - it)x} = 0$ pois $\lim_{x \to \infty} e^{-\lambda} = 0$ e e^{-itx} é limitado em x.

Exemplo 1.82. $Y \sim U(-1,1)$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{itx}}{2} dx = \frac{1}{2}\frac{e^{itX}}{it}|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(\frac{e^{it} - e^{-it}}{it}) = \frac{sen}{t}.$$

Exemplo 1.83. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ são iid com distribuição de $Y \sim Cauchy$

$$E[e^{itY}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} cos(tx)dx = e^{-|t|}$$

e

$$E[e^{it\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}] = E[\prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{i\frac{t}{n}Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}$$

então $\overline{Y}_n \sim Cauchy$ e $\overline{Y}_n =^D Y$.

Teorema 1.84. *Se $E[|X^n|] < \infty$, então $\varphi_X(t)$ possui n derivadas contínuas e*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x), \ k = 1, ..., n$$

e em particular $\varphi_X^k(0) = i^k E[X^k]$
Prova:
$n = 1$

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \int (\frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h}) dF(x)$$
$$= \int e^{itx}(\frac{e^{ihx} - 1}{h}) f(x)dx = E[e^{itx}\frac{(e^{ihx} - 1)}{h}],$$

contudo,

$$\lim_{h \to 0} e^{itx}\frac{(e^{ihx} - 1)}{h} = e^{itx} ix$$

e

$$|e^{itx}(\frac{e^{ihx} - 1}{h})| = |e^{itx}|.|\frac{\int_0^h ixe^{isx}}{h} ds| \leq |x||\frac{\int_0^h e^{isx}}{h} ds| \leq |x|$$

e $E[|X|] < \infty$.
Pelo teorema da convergência dominada,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = E[e^{itX} iX] = \int ixe^{itx} f(x)dx$$

e o mesmo vale para outros momentos.

Observação 1.85. (Convergência Dominada) Se $\lim X_n = X$, $E[X]$ está bem definida, $|X_n| \leq Y, \forall\ n$ e $[|Y|] < \infty$, então

$$\lim_{n \to \infty} E[X_n] = E[\lim_{n \to \infty} X_n] = E[X].$$

Teorema 1.86. *$\varphi_X(t)$ é uniformemente contnua, isto é,*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tal que se } |t-s| < \delta \Rightarrow |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \epsilon.$$

Prova:

$$|\varphi_X(t)-\varphi_X(s)| \leq \int |e^{itx}-e^{isx}|f(x)dx = \int |e^{i(t-s)x}-1|f(x)dx = h(t-s),$$

$h(u) = E[|e^{iux}-1|]$, $0 \leq |e^{iux}-1 \leq 2$ e pelo teorema da convergência dominada

$$\lim_{u\to 0} E[|e^{iux}-1|] = E[\lim_{u\to 0}|e^{iux}-1|] = 0.$$

Como $h(.)$ uma função contínua definida num intervalo compacto (limitado e fechado) então $h(.)$ é uniformemente contínua.

Teorema 1.87. *Se X uma v.a. e $Y = a + bX$, e $a, b \in \Re$ então*

$$\varphi_Y(t) = E[e^{i(a+bX)t}] = E[e^{iat}e^{ibXt}] = e^{iat}E[e^{ibXt}] = e^{iat}\varphi_X(bt).$$

Um resultado importante é

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E[X^n]t^n}{n!}.$$

Exemplo 1.88. $X \sim N(0, \sigma^2)$, então

$$E[X^{2k+1}] = 0 \qquad \text{e} \qquad E[X^{2k}] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}E[X^{2k}]t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sigma^2 t^2/2)^k}{k!} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$
$$Y = X + \mu$$

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu}\varphi_X(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Exemplo 1.89. $X \sim P(\lambda)$, logo, $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\varphi'_X(t) = \lambda e^{it} i e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
$$\varphi'_X(0) = \lambda i = iE[X] \leftrightarrow E[X] = \lambda$$

$$\varphi''_X(t) = \lambda i^2 e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + \lambda e^{it} i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
$$\varphi''_X(0) = \lambda i^2 + \lambda^2 i^2 = (\lambda + \lambda^2) i^2$$
$$i^2 E[X^2] = (\lambda + \lambda^2) i^2 \leftrightarrow E[X^2] = (\lambda + \lambda^2)$$

2. Fórmula da Inversão

Teorema 2.1. *Seja X uma v.a. com valores nos inteiros,($\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj} P(X = j)$). Então*

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt$$

Prova:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} (\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj} P(X = j)) dt$$
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X = j) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt$$

Ocorre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \begin{cases} 1 \ se \ j = k \\ 0 \ se \ j \neq k \end{cases} .$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \frac{e^{i(j-k)t}}{i(j-k)} . \frac{1}{2\pi} |_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(j-k)\pi} - e^{-i(j-k)\pi}}{2\pi i (j-k)} = \frac{sen((j-k)\pi)}{\pi(j-k)} = 0$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt = P(X = k).$$

Exemplo 2.2. Considere uma variável aleatória X com valores inteiros e com função característica $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Qual a sua função de probabilidade.
Utilizando o teorema acima temos que

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} (pe^{it} + 1 - p)^n dt =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (pe^{it})^j (1-p)^{n-j} dt =$$
$$\Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (p)^j (1-p)^{n-j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{itj} dt = \binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k}.$$

Teorema 2.3. *Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$,*

$$\varphi_Z(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Teorema 2.4. Fórmula da Inversão
Se X é uma variável aleatória contínua com função característica $\varphi_X(t)$ integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|dt < \infty.$$

Então sua função densidade de probabilidade é

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Exemplo 2.5. Seja X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty.$$

Estamos interessados em calcular sua função característica $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}(\frac{e^{-itx} + e^{itx}}{2})dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}costxdx.$$

Contudo, integrando por partes obtemos

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}costxdx = 1 - t^2\int_{0}^{\infty} e^{-x}costxdx$$

e concluimos que

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}costxdx = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_X(t).$$

Usando a fórmula da inversão, do teorema anterior, temos

$$\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

e concluimos que a distribuição de Cauchy padrão tem função característica $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

Exemplo 2.6. Se X é uma variável aleatória com distribuição $N(0, \sigma^2)$, a sua função característica é $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, isto é

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se, na expressão acima, substituirmos t por $-t$ e σ por $\frac{1}{\sigma}$, temos

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx,$$

isto é

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx.$$

Observação 2.7. Seja Y uma variável aleatória com distribuição normal padrão e c uma constante real a função característica de cY é $\varphi_{cY}(t) = e^{-\frac{c^2 t^2}{2}}$. Seja X uma variável aleatória, independente de Y, com função característica $\varphi_X(t)$.
A função característica de $Z = X + cY$ é

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t).e^{-\frac{c^2 t^2}{2}}.$$

Como $\varphi_Z(t)$ é integrável, aplicamos o teorema acima e obtemos

$$f_z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) e^{-\frac{c^2 t^2}{2}} dt.$$

se integramos a expressão acima sobre o intervalo $(a, b]$ e aplicamos o teorema de Fubine temos

$$P(a < X + cY \leq b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx) \varphi_X(t) e^{-\frac{c^2 t^2}{2}} dt =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{-it}) \varphi_X(t) e^{-\frac{c^2 t^2}{2}} dt.$$

Fazendo c convergir para 0 e a convergir para $-\infty$ na expressão acima, obtemos a função de distribuição de X que, pela expressão à direita, depende exclusivamente da função característica de X. O resultado é enunciado abaixo.

Teorema 2.8. Teorema da Unicidade
Se duas variáveis aleatórias tem mesma função característica, então tem mesma função de distribuição.

Exemplo 2.9. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e $p, 0 < p < 1$ e seja Y uma variável aleatória, independente de X, com distribuição binomial de parâmetros m e $p, 0 < p < 1$. As funções características de X e Y são

$$\varphi_X(t)) = (q + pe^{it})^n \quad e \quad \varphi_Y(t)) = (q + pe^{it})^m$$

respectivamente, onde $q = 1 - p$.
Portanto $\varphi_{X+Y}(t) = (q + pe^{it})^{n+m}$ e concluimos que $X + Y$ tem distribuição binomial de parâmetros $n + m$ e $p, 0 < p < 1$.

Exemplo 2.10. Se X é uma variável aleatória com função característica $\varphi_X(t) = cos^2(t)$, qual sua função de probabilidade?
Observe que a função característica é real , isto é $\varphi_X(t) = E[cosXt]$.
Podemos, tambem,escrever que

$$\varphi_X(t) = cos^2(t) = \frac{1 + cos2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2t.$$

Se definimos $X = 0$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ e $X = 2$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ obtemos, pelo teorema da unicidade, o resultado.

No que segue enunciaremos os teoremas que relacionam a convergência em distribuição com a convergência das respectivas funções características.

Teorema 2.11. Teorema de Helly-Bray
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias. Sejam $(F_n)_{n\geq 1}$ e F as suas respectivas funções de distribuições tais que $F_n \to^D F$. Então, para toda função g contínua e limitada temos

$$E[g(X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = E[g(X)].$$

Observação 2.12. Em particular, podemos aplicar o teorema acima para as funções $cos(t)$ e $sen(t)$ que são contínuas e limitadas, obtendo

$$\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (cos(tx)+isen(tx))dF_n(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx)dF_n(x) + \int_{-\infty}^{\infty} isen(tx)dF_n(x) \to_{n\to\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx)dF(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} sen(tx)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x) = \varphi_X(t).$$

Exemplo 2.13. Se $f : (0,1) \to \Re$ é uma função contínua e limitada , então podemos representar $f(t)$ por

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Claramente , a representação é resultado do teorema de Helly-Bray, quando consideramos variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Bernoulli de parâmetro t.

Teorema 2.14. Teorema da continuidade de Paul-Levy
Seja $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e $(\varphi_{X_n})_{n\geq 1}$ a sequência de suas respectivas funções características. Se $\varphi_{X_n}(t)$ converge pontualmente para $\varphi(t)$ e φ é contínua no ponto 0, então:
a) Existe uma variável aleatória X, com função de distribuição F_X tal que $F_n \to^D F$ e
b) φ é função característica de X.
Prova:
Pela fórmula da inversão temos

$$f_{X_n}(x) == \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{X_n}(t) dt.$$

Seja

$$f_X(x) == \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Portanto

$$P(a < X_n \leq b) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_{X_n}(t) dt) dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx) \varphi_{X_n}(t) dt,$$

e, pelo teorema da convergência dominada temos

$$\lim_{n\to\infty} P(a < X_n \leq b) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx) \varphi_{X_n}(t) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx) \varphi_X(t) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} (\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dx) \varphi_X(t) dt = \int_a^b f_X(x) dx = P(a < X \leq b).$$

Assim

$$P(X_n \leq b) = \lim_{a\to-\infty} P(a < X_n \leq b) = \lim_{a\to-\infty} P(a < X \leq b) = P(X \leq b).$$

Exemplo 2.15. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim B(n,p)$ e tal que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$.
A função característica de X_n é

$$\varphi_{X_n}(t) = (1 - p + pe^{it})^n = (1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it})^n = (1 - \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1))^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t)$$

que é contínua no ponto 0 e é a função característica de ume variável aleatória com distribuição de Poisson.

Exemplo 2.16. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim N(0,n)$ com função característica $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2 n}{2}}$.
Assim

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = 1 \quad se \quad t = 0 \quad e \quad 0 \quad se \quad t \neq 0$$

que não é contínua em $t = 0$ e portanto não é função característica.
Observe que

$$P(X_n \leq x) = P(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} = P(Z \leq \frac{x}{\sqrt{n}}) \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

que não é função de distribuição.

Observação 2.17. Se z é um número complexo tal que $|z-1| < 1$, podemos definir, através da série de Taylor

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - ....$$

Portanto se se $|z-1| < 1$ temos as propriedades usuais: $z = e^{\ln z}$, $\ln 1 = 0$. Se X é uma variável aleatória, a sua função característica $\varphi_X(t)$ é contínua, $\varphi_X(0) = 1$ e assim $\ln \varphi_X(t)$ é bem definida para t próximo de zero.
Se $E[X] = \mu < \infty$, então $\varphi_X'(0) = i\mu$. Portanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(0)}{t} = \frac{d \ln \varphi_X(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{\varphi_X'(0)}{\varphi_X(0)} = i\mu.$$

Consequentemente temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t} = 0.$$

Suponha que $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, então $\varphi_X''(0) = -E[X^2] = -(\mu^2 + \sigma^2)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} - i\mu}{2t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X^{'}(t)-i\mu\varphi_X(t)}{2t\varphi_X(t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X^{''}(t)-i\mu\varphi_X^{'}(t)}{2\varphi_X(t)+2t\varphi_X'(t)}=$$

$$\frac{\varphi_X^{''}(0)-i\mu\varphi_X^{'}(0)}{2\varphi_X(0)}=\frac{-(\mu^2+\sigma^2)-(i\mu)^2}{2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\varphi_X(t)-i\mu t}{t^2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Teorema 2.18. Teorema do Limite Central
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média $E[X_1]=\mu$ e variância $Var(X_1)=\sigma^2<\infty$. Então

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq x)=P(Z\leq x),\quad -\infty<x<\infty.$$

onde $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ e Z tem distribuição normal padrão.
Prova: *Seja $S_n^*=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. então*

$$\varphi_{S_n^*}(t)=E[e^{itS_n^*}]=E[e^{it(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})}]=$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}}E[e^{\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}}]=$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n.$$

Portanto

$$\varphi_{S_n^*}(t)=\exp\{n[\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-\frac{i\mu(t}{\sigma\sqrt{n}})]\}.$$

Contudo

$$\lim_{n\to\infty}n[\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}\frac{\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}{(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^2}=$$

$$\frac{t^2}{\sigma^2}(-\frac{\sigma^2}{2})=-\frac{t^2}{2}.$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{S_n^*}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}=\varphi_Z(t).$$

Pelo teorema da unicidade temos o resultado.

Como uma extensão do Teorema do Limite Central, pode-see provar que (ver Barri James)

Teorema 2.19. *Sejam* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias tais que*

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \to^D N(0, \sigma^2).$$

Se g(y) é uma função derivável no ponto μ*, então*

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \to^D N(0, \sigma^2(g^{'}(\mu))^2).$$

Exemplo 2.20. Pelo Teorema do limite central temos

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^D N(0,1)$$

que é equivalente a

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to^D N(0,1).$$

Pelo Teorema de Slutsky concluimos que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \to^D N(0, \sigma^2).$$

Pelo teorema anterior, se consideramos $g(x) = x^2$, temos

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \to^D N(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

Se consideramos $g(x) = \frac{1}{x}$ temos, se $\mu \neq 0$

$$\sqrt{n}(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\mu}) \to^D N(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}).$$

2.1. **Exercícios.** 1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(-1, 1)$. Defina a variável

$$Y_n = \min\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\}.$$

Mostre que Y_n converge em probabilidade para o.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parâmetro λ. Prove que a sequência $(X_n^2)_{n\geq 1}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $0 < p < 1$. Defina $Y_n = (\pi_{k=1}^n X_k)^{\frac{1}{n}}$
a) Calcule $P(Y_n > 0)$ e $E[Y_n]$.
b) Verifique se Y_n converge em probabilidade.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, X_n com distribuição $N(n, \sigma^2)$. A sequência de variáveis $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição?

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Cauchy padrão. Verifique se $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i \rightarrow^D ?$.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Determine o tamanho da amostra para que

$$P(||\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}) \simeq 0,95.$$

7) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $N(0, 1)$. Mostre que $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}$ converge quase certamente.

8) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_n \sim Exp(2^{\frac{n}{2}})$. Mostre que vale a Lei forte dos Grandes Números.

9) Seja $(X_n)_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\log n} \quad e \quad P(X_n = n) = \frac{1}{\log n}.$$

Mostre que $X_n \to^P 0$ mas X_n não em média quadrática.

10) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Prove que o coeficiente de variação amostral converge , em probabilidade, para o coeficiente de variação populacional, isto é $\frac{S_n}{\overline{X}_n} \to^P \frac{\sigma}{\mu}$.

11) Seja X_n uma variável aleatória com distribuição χ^2_n. Prove que $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$ converge em distribuição.

13) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes i identicamente distribuidas tais que $E[X_1] = 0$, $Var(X_1) = 1$ e $E[X_1^4] < \infty$. Defina

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{X_1X_2 + X_3X_4 + ... + X_{2n-1}X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_{2n}^2}$$

Qual o limite em distribuição de Z_n?

14) Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias positivas, independentes e com funções de distribuições absolutamente contínuas $F_1, F_2, ...$ respectivamente. Defina

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{X_i} \frac{dF_i(x)}{1 - F_i(x)}.$$

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{g(\frac{y}{n})Y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!} dy.$$

2.2. **Convergência em média quadrática.** Os espaços vetoriais $L^p, p \geq 1$ são espaços de variáveis aleatórias X tais que $E[|X|^p] < \infty$, sem distinção entre variáveis aleatórias X e Y que são iguais quase certamente, isto é $P(X = Y) = 1$. Sob a norma $\|X\|_p = (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ é um espaço completo em que toda sequência de Cauchy converge. Pela desigualdade de Jensen, se $1 \leq p \leq q$, $\|X\|_p \leq \|X\|_q$ e $L^q \subseteq L^p$. Em nossas notas estudamos o caso particular em que $p = 2$.

Definição 2.21. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) tal que $E[|X_n|^2] < \infty, n \geq 1$. Dizemos que a sequência converge em média quadrática para uma variável aleatória X, com $E[|X|^2] < \infty$, e denotamos por $X_n \to^{mq} X$, se

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0.$$

A convergência em média quadrática tem um papel técnico na Teoria da Probabilidade, em situações quando a informação sobre a sequência de variáveis consiste das médias $E[X_n], n \geq 1$ e das covariâncias $E[(X_n - \mu_{X_n})(X_m - \mu_{X_m})]$. Em tais casos não conseguimos, em geral, trabalhar com a função característica $E[e^{itX_n}]$ ou avaliar quantidades tais como $P(X_n \geq \varepsilon)$ que são ferramentas para analisar convergência em distribuição e convergência quase certa, respectivamente. Ao contrário, os momentos de segunda ordem são suficientes para determinar se $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em média quadrática ou não. Enfim, podemos utilizar o critério de Cauchy para provar a convergência

Teorema 2.22. *Uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.(s) tal que $E[|X_n|^2] < \infty$ converge em média quadrática para uma variável aleatória X se, e somente se*

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = 0.$$

Prova: *Observe o desenvolvimento quadrático:*

$$|X_n - X_m|^2 = |X_n - X|^2 + |X_m - X|^2 + 2|X_n - X||X_m - X|.$$

Pela desigualdade de Schwarz, se $X_n \to^{mq} X$ temos

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X||X_m - X|] \leq \lim_{n,m\to\infty} \sqrt{E[|X_n - X|^2]E[|X_m - X|^2]} = 0.$$

Assim, sob tal hipótese

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = \lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X|^2 + |X_n - X|^2 + 2|X_n - X||X_m - X|] = 0$$

e vale a condição necessária.
Por outro lado, se aceitamos que $\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = 0$ *concluímos a condição suficiente, pelo desenvolvimento quadrático acima, que* $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0$.

Observação 2.23. Procede da Desigualdade de Markov que
$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}.$$
e concluimos que a convergência em média quadrática implica em convergência em probabilidade que, por sua vez, implica em convergência em distribuição. Como indica o exemplo seguinte a convergência quase certa não implica em convergência em média quadrática.

Exemplo 2.24. Seja uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ com $P(X_n = 2^n) = \frac{1}{n(n+1)}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$ para todo n.
Temos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \frac{1}{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$
e portanto $X_n \to^{qc} 0$.
Contudo
$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{n(n+1)} = \infty$$
e $X_n \nrightarrow^{mq} 0$.

Apesar do exemplo acima, existem situações em que a implicação é verdadeira:

Teorema 2.25. *Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a.(s)e X é uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$ e $|X_n| \leq Y$, com $E[Y^2] < \infty$, então $X_n \to^{mq} X$*
Prova: *Se $X_n \to^{qc} X$, $|X_n - X|^2 \to^{qc} 0$. Como $|X_n| \leq Y$, q.c.para todo $n \geq 1$ temos também que $|X| \leq Y$, q.c. e então $|X_n - X|^2 \leq 4Y^2, q.c.$*
Portanto, pelo teorema a convergência dominada temos
$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = E[\lim_{n\to\infty} |X_n - X|^2] = 0.$$

Observação 2.26. **Relação entre os tipos de convergência**
Os teoremas, propriedades e cotra-exemplos analisados nos permite organizar a seguinte relação entre os tipos de convergência:
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias, então
Se
$$X_n \to^{qc} X \Rightarrow X_n \to^{P} X \Rightarrow X_n \to^{D} X$$
Em geral, o reverso das implicações não valem, contudo, se $P(X = k) = 1$, onde k úma constante, vale $X_n \to^{D} k \Rightarrow X_n \to^{P} k$
Em, adição
$$X_n \to^{mq} X \Rightarrow X_n \to^{P} X \Rightarrow X_n \to^{D} X$$

No existe uma relação entre convergência quase certa e convergência em média quadrática, contudo, se $(X_n)_{n\geq 1}$ é limitada por uma variável aleatória Y,$|X_n| \leq Y, qc$, com $E[Y^2] < \infty$, então convergência quase certa implica em convergência em média quadrática.

2.3. **O teorema do limite central.** Consideremos uma sequência de variáveis aleatórias independentes $(X_n)_{n\geq 1}$ definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ e seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais definidas por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

O problema do limite central trata da convergência em distribuição das somas parciais normalizadas

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^{D} N(0,1).$$

No capítulo anterior analisamos uma solução quando as variáveis aleatórias na sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ são independentes e identicamente distribuidas, com média μ e variância σ^2 finita:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^{D} N(0,1).$$

Enunciamos o Teorema do limite Central de Lindeberg que dá condições gerais para a validade da convergência (para a prova ver Barry James).

Teorema 2.27. Lindeberg *Seja* $(Xn)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes com* $E[X_n] = \mu_n$ *e* $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ *e pelo menos um* $\sigma_n^2 > 0$*. Sejam* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *e* $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$*. Se a condição de Lindeberg, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|x-\mu_k| > \varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

é satisfeita, então

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^{D} N(0,1).$$

Observação 2.28. A notação $\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}$ significa que o cálculo da integral é feito na região $(-\infty, \mu_k - \varepsilon s_n) \cup (\mu_k + \varepsilon s_n, \infty)$. Se X_k for discreta com função de probabilidade $p_k(x_i)$, então

$$\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) = \sum_{\{i:|x_i-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x_i - \mu_k)^2 p_k(x_i).$$

Por outro lado se X_k for absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_k(x)$, temos

$$\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x) = \int_{-\infty}^{\mu_k-\varepsilon s_n}(x-\mu_k)^2 f_k(x)dx+\int_{\mu_k+\varepsilon s_n}^{\infty}(x-\mu_k)^2 f_k(x)dx.$$

Observe que

$$\sigma_k^2 = \int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x) + \int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x),$$

de modo que a condição de Lindeberg pode ser escrita da seguinte forma

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x) = 1.$$

A condição de Lindeberg significa, basicamente, que as parcelas $\frac{X_k-\mu_k}{s_n}$ da soma $\frac{S_n-E[S_n]}{s_n}$ são uniformemente pequenas para n grande. Por exemplo, a condição de Lindeberg implica

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0,$$

ou seja, para n grande, as variâncias das parcelas são uniformemente pequenas em relação à variância da soma. Para ver isto, observe que Para todo k,

$$\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x)+$$

$$\frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x) \leq$$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_j)^2 dF_j(x)+$$

$$\frac{1}{s_n^2}\int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}}\varepsilon^2 s_n^2 dF_k(x) \leq$$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_j)^2 dF_j(x) + \frac{1}{s_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2 s_n^2 dF_k(x).$$

Este último termo não depende de k pois a última parcela é igual a ε^2. Portanto temos

$$max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \leq \varepsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_j)^2 dF_j(x)$$

que converge para ε^2, pela condição de Lindeberg. Como vale para todo $\varepsilon > 0$, temos o resultado

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0.$$

Do ponto de vista intuitivo, isso serve para justificar a afirmação: a soma de um grande número de pequenas quantidades independentes e de médias zero tem aproximadamente a distribuição normal.

Observemos que a condição de Lindeberg é formalmente mais forte que a condição sobre o máximo das variâncias.

Como $s_n^2 = \sum_{k=1}^n (x-\mu_k)^2 dF_k(x)$, a condição diz que, quando n é grande, é pequena a parte da variância da soma devida às "caudas" das X_k situadas a mais de ε desvios-padrão s_n das suas respectivas médias μ_k.

É interessante, porém, que na presença da condição sobre o máximo, a condição de Lindeberg torna-se necessária para a validade do teorema do limite central:

Teorema 2.29. Feller

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $E[X_n] = \mu_n$ e $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ e pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Sejam $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Se

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0$$

e

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^D N(0,1),$$

então

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x) = 0.$$

O Lema seguinte será utilizado nos exemplos e exercícios:

Lema 2.30. *Para $\lambda > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}\sum_{k=1}^{n}k^\lambda = \frac{1}{\lambda+1},$$

de maneira que $\sum_{k=1}^n k^\lambda$ *é da ordem de* $n^{\lambda+1}$.

Prova:

Como $x^\lambda \leq k^\lambda$ *se* $k-1 \leq x \leq k$ *e* $k^\lambda \leq x^\lambda$ *se* $k \leq x \leq k+1$ *temos*

$$\int_{k-1}^{k} x^\lambda dx \leq \int_{k-1}^{k} k^\lambda dx = k^\lambda = \int_{k}^{k+1} k^\lambda dx \leq \int_{k}^{k+1} x^\lambda dx.$$

Portanto

$$\int_{0}^{n} x^\lambda dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^\lambda \leq \int_{1}^{n+1} x^\lambda dx$$

e

$$\frac{n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \leq \sum_{k=1}^{n} k^\lambda \leq \frac{(n+1)^{\lambda+1}-1}{\lambda+1} \leq \frac{(n+1)^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{\lambda+1} \leq \frac{1}{n^{\lambda+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\lambda \leq \frac{1}{\lambda+1}(\frac{n+1}{n})^{\lambda+1}.$$

como $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^{\lambda+1} = 1$ *o lema está provado.*

Exemplo 2.31. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $X_n \sim U(-n,n)$.Verifiquemos a condição de Lindeberg:

Observa-se facilmente que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = \frac{k^2}{3}$ para todo k.

Consideremos a parcela

$$\int_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} x^2 1_{\{|x|>\varepsilon s_n\}}(x)dx$$

e esta última integral é nula se $n < \zeta s_n$, pois neste caso , o integrando toma o valor zero em $(-k,k)$. Pelo lema acima temos

$s_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3}$ é tal que

$$\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

isto é, quando n é grande, $\frac{s_n^2}{n^3} = \frac{s_n^2}{n^2}\frac{1}{n} \approx \frac{1}{9}$ e concluimos que $\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = \infty$.

Portanto,

$$\forall M > 0, \exists n_0 | \quad se \quad n \geq n_0 \to \frac{s_n}{n} > M.$$

Basta tomar $M = \frac{1}{\varepsilon}$ e temos $\varepsilon s_n > n$.

O teorema do limite central para sequências de varíaveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, analisado no capítulo anterior, segue como um corolário do teorema de Lindeberg

Corolário 2.32. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média $E[X_1] = \mu$ e $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$, então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^D N(0,1).$$

Prova: *Observe que $s_n^2 = n\sigma^2$.*
Verifiquemos a condição de Lindeberg, para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-\mu|\leq\sigma\sqrt{n}\varepsilon\}}(x-\mu)^2 dF_k(x) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_{\{|x-\mu|\leq\sigma\sqrt{n}\varepsilon\}}(x-\mu)^2 dF_1(x) \to_{n\to\infty}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 dF_1(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

O Teorema de Liapunov, a seguir, é muito útil quando as variáveis aleatórias X_n possuem momentos finitos de ordem maior que 2. O teorema afirma que a convergência normal vale se as somas dos mementos centrais absolutos de ordem $2+\delta$ é assintóticamente pequena em relação a $s_n^{2+\delta}$.

Corolário 2.33. Liapunov
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $E[X_n] = \mu_n$ e $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$, com pelo menos um $\sigma_n^2 > 0$. Seja $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$. Se existir $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E[|X_k-\mu_k|^{2+\delta} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^D N(0,1).$$

Exemplo 2.34. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, $X_n \sim U(-n,n)$.Verifiquemos a condição de Liapunov: Verifica-se facilmente que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = \frac{k^2}{3}$ para todo k. Assim $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3}$ é tal que

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

temos que para n grande, $\frac{s_n^2}{n^3} = \frac{s_n^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$. s_n é da ordem de $n^{\frac{3}{2}}$ e s_n^3 é da ordem de $n^{\frac{9}{2}}$.

$$E[|X_k - \mu_k|^{2+1} = E[|X_k|^3] = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k} |x|^3 dx = \frac{1}{k}\int_{0}^{k} |x|^3 dx = \frac{k^3}{4}.$$

e

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{4} = \frac{1}{16}.$$

isto é, $\sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3]$ é da ordem de n^4.Portanto

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3] =$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{9}{2}}}{s_n^3}\frac{\sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3]}{n^4}\frac{n^4}{n^{\frac{9}{2}}} = \frac{27}{16}.lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

2.4. **Exercícios.** 1)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que , para cada j, $P(X_j = \pm j^\alpha) = \frac{1}{6j^{2(\alpha-1)}}$ e $P(X_j = 0) = 1 - \frac{1}{3j^{2(\alpha-1)}}$. Para que valores de $\alpha, \alpha > 1$ a condição de Liapunov é válida?

2)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, X_n com função densidade de probabilidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}}, x \in \Re.$$

Verifique se a condição de Liapunov é válida?

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas tais que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = 1$. Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(Y_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$ e $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n^2}$. Verifique que a condição de Lindeberg não vale, mas

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k) \to^D N(0,1).$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuidas no intervalo $(-a_n, a_n)$. Encontre condições para que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|y-E[X_k]|>\varepsilon n\}} (y - E[X_k])^2 dF_k(y) = 0.$$

5)) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Calcule o limite em probabilidade de $\frac{\sum_{k=1}^{n} - \log X_k}{n}$.

2.5. **Estatísticas de Ordem e distribuição assintótica de valores extremos.** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição F definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. A cada realização $w \in \Omega$, ordenamos $X_1(w), X_2(w), ..., X_n(w)$ e denotamos por $X_{(n;1)} \leq X_{(n;2)} \leq .... \leq X_{(n;n)}$. $X_{(n;k)}$ é denominada k-ésima estatística de ordem dos $X_1, X_2, ..., X_n$. Em particular denotamos:

$$X_{(n;1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

$$X_{(n;n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

Assumiremos que F é contínua e portanto $P(X_i = X_j) = 0, \forall i, j$ e concluímos que $X_{(n;1)} < X_{(n;2)} < .... < X_{(n;n)}$.

Teorema 2.35. *Sob as hipóteses acima, a função densidade de probabilidade (conjunta) de $X_{(n;k)}$, ($X_{(n;i)}, X_{(n;j)}$ e de $X_{(n;1)}, X_{(n;2)}, ..., X_{(n;n)}$) são respectivamente*

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-F(x))^{n-k}F(x)^{k-1}f(x);$$

$$f_{X_{(n;i)},X_{(n;j)}}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}F(x)^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}.$$
$$[1-F(y)]^{n-j}f(x)f(y) \quad se \quad x < y;$$

$$f_{X_{(n;1)},X_{(n;2)},...,X_{(n;n)}}(x_1, x_2, ..., x_n) = n!f(x_1)f(x_2)....f(x_n) \;\; se \;\; x_1 < x_2 < ... < x_n.$$

Prova:

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \lim_{dx \downarrow 0} \frac{F_{X_{(n;k)}}(x+dx) - F_{X_{(n;k)}}(x)}{dx} = \lim_{dx \downarrow 0} \frac{P(x < X_{(n;k)} \leq x + dx)}{dx} =$$

$$\lim_{dx \downarrow 0} \frac{P((k-1) \quad dos \quad X_i's \in (-\infty, x], \quad um \quad X_i \in (x, x+dx],}{dx}$$

$$\frac{P((n-k) \quad dos \quad X_i's \in (x+dx, \infty))}{dx} =$$

$$\lim_{dx \downarrow 0} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{F(x)^{k-1}[F(x+dx) - F(x)][1-F(x+dx)]^{n-k}}{dx}.$$

Como $\lim_{dx \downarrow 0} 1 - F(x+dx) = 1 - F(x)$ *e* $\lim_{dx \downarrow 0} \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = f(x)$ *concluimos que*

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-F(x))^{n-k}F(x)^{k-1}f(x).$$

A parte restante da prova segue com argumentos análogos.

Uma prova alternativa da demonstração acima que tem interesse em si, segue na observação abaixo.

Observação 2.36. Considere a função beta definida por

$$B_{n,k}(u) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^u t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^u (1-t)^{n-k}dt^k, 0 < u < 1.$$

Integrando por partes, temos:

$$B_{n,k}(u) = \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}|_0^u + \binom{n}{k}\int_0^u (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}dt =$$

$$\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^u t^k(1-t)^{n-k-1}dt.$$

Repetindo tal processo $(n-k-1)$ vezes obtemos

$$B_{n,k}(u) = \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}u^r(1-u)^{n-r}.$$

Consequentemente

$$P(X_{(n;k)} \leq x) = P(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}} \geq k) = \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}F(x)^r(1-F(x))^{n-r} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt.$$

Se F é absolutamente contínua,

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x).$$

2.6. **Funções das Estatísticas de Ordem.** A média amostral da estatísticas de ordem $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{(n;k)}}{n}$ é identicamente distribuida à média amostral dos $X_i's$, $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$.

A mediana é definida por

$$Md = \begin{cases} X_{(n:\frac{n+1}{2})}, n = 2k+1 & : \\ \frac{X_{(n:\frac{n}{2})} + X_{(n:\frac{n+1}{2})}}{2}, n = 2k & : \end{cases}$$

A amplitude R é definida por $R = X_{(n;n)} - X_{(n;1)}$.

A amplitude média T é definida por $\frac{X_{(n;n)} + X_{(n;1)}}{2}$.

Exemplo 2.37. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. A função de densidade conjunta de $X_{(n;1)}, X_{(n;n)}$ é

$f_{X_{(n;1)},X_{(n;n)}}(x,y) = n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(x)f(y),\ \ 0 < x < y < 1,\ \ e\ 0$ c.c.

$Nossoobjetivoéencontrarafunçãodensidadedeprobabilidadedaamplitude$

R.$Comovariávelauxiliartomaremosaamplitudemédia$T.
Assim $r = y-x$ e $t = \frac{x+y}{2}$, $x = t-\frac{r}{2}$ e $y = t+\frac{r}{2}$ definem a transformação bijetora com Jacobiano

$$J = \frac{\delta x}{\delta r}\frac{\delta y}{\delta t} - \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta y}{\delta r} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1.$$

[width=5cm,height=5cm]Figura1.jpg
[width=5cm,height=5cm]Figura2.jpg

O valor absoluto do Jacobiano , $|J| = 1$, é 1. Se consideramos $n = 10$

$$f_{R,T}(r,t) = 10.9.[t + \frac{r}{2} - t + \frac{r}{2}]^8.1.1 = 90r^8 1_D(r,t)$$

onde D é a região de definição obtida através das regiões fechadas

$$0 < x < 1, y = 0 \Rightarrow 0 \leq t - \frac{r}{2} \leq 1, t = \frac{-r}{2} \Rightarrow -1 \leq r \leq 0;$$

$$x = 0, 0 < y < 1 \Rightarrow t - \frac{r}{2} = 0, 0 < t + \frac{r}{2} < 1 \Rightarrow 0 < r < 1;$$

$$x = 1, 0 < y < 1 \Rightarrow t - \frac{r}{2} = 1, 0 < t + \frac{r}{2} < 1 \Rightarrow -1 < r < 0;$$

$$0 < x < 1, y = 1 \Rightarrow 0 < t = \frac{-r}{2} < 1, t = 1 - \frac{-r}{2} \Rightarrow 0 < r < 1.$$

Portanto a função densidade de probabilidade da amplitude R é

$$f_R(r) = \begin{cases} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r+2}{2}} 90r^8 dt = 90r^8(r+1) & : \quad -1 < r < 0 \\ & : \\ \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{2-r}{2}} 90r^8 dt = 90r^8(1-r) & : \quad 0 < r < 1 \end{cases}$$

2.7. **Função de distribuição empírica.** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição F definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. A função de distribuição empírica é definida por:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}$$

Observe que a função de distribuição empírica é um estimador não viciado e consistente da função de distribuição,

$$E[F_n(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[1_{\{X_i \leq x\}}] = F(x)$$

e

$$Var(F_n(x)) = E[(F_n(x) - F(x))^2] = \frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

que converge para 0 quando n converge para o infinito. Portanto $F_n(x) \rightarrow^{mq} F(x)$, $F_n(x) \rightarrow^{P} F(x)$ e $F_n(x) \rightarrow^{D} F(x)$.

Com mais rigor, Glivenko-cantelli, provou o teorema

Teorema 2.38. *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição F definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então*

$$\sup_{x \in \Re} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow^{qc} 0.$$

Note que

$$P(F_n(x) \geq \frac{k}{n}) = P(nF_n(x) \geq k) = P(X_{(n;k)} \leq x)$$

e

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < X_{(n;1)} \\ \frac{k}{n} & : \quad X_{(n;k)} \leq x < X_{(n;k+1)} \\ & \vdots \\ 1 & : \quad x \geq X_{(n;n)} \end{cases}.$$

[width=12cm,height=10cm]Figura3.jpg

Portanto existe uma correspondência biunívoca entre $F_n(x)$ e as estatísticas de ordem.

[width=3.5cm,height=3.5cm]Figura4.jpg
[width=3.5cm,height=3.5cm]Figura5.jpg
[width=3.5cm,height=3.5cm]Figura6.jpg

Considere um número real $p, 0 < p < 1$ e seja ζ_p o p-ésimo quantil de F, isto é, ζ_p é a única solução de $F(x) = p$, quando existir.
Se, para uma estatística de ordem $X_{(n;k)}$, $\frac{k}{n}$ converge para p de maneira conveniente, $X_{(n;k)}$ é chamado o p-ésimo quantil amostral, $\widehat{\zeta}_{p,n}$. Embora existam várias maneiras de definirmos tal k, as mais adotadas são $k = k_p = [np] + 1$ e $k = k_p = [(n+1)p]$.

Exemplo 2.39. Se $p = \frac{1}{2}$, ζ_p é a mediana de F. Se n é impar, $n = 2m + 1$ temos

$$[np]+1 = [\frac{(2m+1)}{2}]+1 = [m+\frac{1}{2}]+1 = m+1 \;\; e \;\; [(n+1)p] = [\frac{(2m+1+1)}{2}]$$
$$= [m+1] = m+1.$$

Assim o p-ésimo quantil amostral $\widehat{\zeta}_{p,n} = X_{(n;m+1)}$.
Se n é par, $n = 2m$ temos

$$[np] + 1 = [\frac{2m}{2}] + 1 = m + 1 \;\; e \;\; [(n+1)\frac{1}{2}] = [m + \frac{1}{2}] = m.$$

Neste caso convencionamos definir p-ésimo quantil amostral como $\widehat{\zeta}_{p,n} = \frac{X_{(n;m+1)}+X_{(n;m)}}{2}$

Desde que F_n é uma função escada, os p-ésimo quantis amostrais podem ser definidos como

$$\widehat{\zeta}^1_{p,n} = \sup\{x : F_n(x) \leq p\}$$
$$\widehat{\zeta}^2_{p,n} = \inf\{x : F_n(x) \geq p\}$$

definem um intervalo aberto onde podemos realizar uma interpolação linear

[width=6cm,height=7cm]Figura7.jpg

Considerando uma relação linear $y = a + bx$ que relacione os pontos $(\widehat{\zeta}^1_{p,n}, \frac{k-1}{n})$ e $(\widehat{\zeta}^2_{p,n}, \frac{k}{n})$, isto é, resolvendo

$$\frac{k}{n} = a + b\widehat{\zeta}^2_{p,n}$$
$$\frac{k-1}{n} = a + b\widehat{\zeta}^1_{p,n}$$

temos $b = \frac{1}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}$ e $a = \frac{k}{n} - \frac{\widehat{\zeta}^2_{p,n}}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}$, produzindo a reta

$$y = \frac{k}{n} - \frac{\widehat{\zeta}^2_{p,n}}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})} + \frac{x}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}.$$

A imagem inversa de p através dessa reta é

$$x = \widehat{\zeta}^2_{p,n}(np + 1 - k) + \widehat{\zeta}^1_{p,n}(k - np).$$

Tais considerações justificam a adoção de k_p.

Para valores grandes de n estas modificações são de menor importância. Observe que $X_{(n;k)}$, $(X_{(n;n-k+1)})$ é a k-ésima menor (maior) estatística de ordem. Em particular $X_{(n;1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ e $X_{(n;n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

No contexto da teoria assintótica, quando $\frac{k}{n} \to_{n\to\infty} 0$ ou $\frac{k}{n} \to_{n\to\infty} 1$, estas estatísticas de ordem são denominadas de valores extremos. As populações adequadas para tais formulações são:

A) Suponha que exista $\zeta_0 > -\infty$ tal que

$$F(x) > 0 \quad se \quad x > \zeta_0 \quad e \quad F(x) = 0 \quad se \quad x \leq \zeta_0,$$

então ζ_0 é denominado um ponto final inferior para F. Se $\zeta_0 = -\infty$, dizemos que F tem um ponto final inferior infinito.

B) Suponha que exista $\zeta_1 < \infty$ tal que

$$F(x) < 1 \quad se \quad x < \zeta_1 \quad e \quad F(x) = 1 \quad se \quad x \geq \zeta_1,$$

então ζ_1 é denominado um ponto final superior para F. Se $\zeta_1 = \infty$, dizemos que F tem um ponto final superior infinito.

O comportamento das distribuições dos valores extremos dependem se a população tem pontos finais inferiores (superiores) finitos ou não.

Teorema 2.40. *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição F definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Se F tem um ponto final inferior finito (ζ_0) e um ponto final superior finito (ζ_1), então $X_{(n;n)} \to_P \zeta_1$ e $X_{(n;1)} \to_P \zeta_0$.*

Prova: *Se ζ_1 é um ponto final superior finito,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \;\; 0 < \eta = \eta(\varepsilon) < 1, : F(\zeta_1 - \varepsilon) = 1 - \eta.$$

Portanto

$$P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \varepsilon) = P(X_{(n;n)} > \varepsilon + \zeta_1) + P(X_{(n;n)} < \zeta_1 - \varepsilon) =$$

$$1 - P(X_{(n;n)} \leq \varepsilon + \zeta_1) + \pi_{i=1}^n P(X_i < \zeta_1 - \varepsilon) = 1 - \pi_{i=1}^n P(X_i < \zeta_1 + \varepsilon) + (F(\zeta_1 - \varepsilon))^n =$$

$$1 - (F(\zeta_1 + \varepsilon))^n + (1 - \eta)^n = 1 - 1 + (1 - \eta)^n = (1 - \eta)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty}(1-\eta)^n = 0.$$

Em adição, $\forall m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\eta)^n = \frac{1-\eta}{\eta} < \infty$$

e $X_{(n;n)} \to_{qc} \zeta_1$.

Se ζ_0 *é um ponto final inferior finito,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \;\; 0 < \eta = \eta(\varepsilon) < 1, : F(\zeta_0 + \varepsilon) = \eta.$$

$$P(|X_{(n;1)} - \zeta_0| \leq \varepsilon) = P(X_{(n;1)} > \zeta_0 - \varepsilon) - P(X_{(n;1)} > \zeta_0 + \varepsilon) =$$
$$\pi_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \leq \zeta_0 - \varepsilon)) - \pi_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \leq \zeta_0 + \varepsilon)) =$$
$$1 - (1 - F(\zeta_0 + \varepsilon))^n = 1 - (1-\eta)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;1)} - \zeta_1| \leq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1-\eta)^n = 1.$$

Em adição, $\forall m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{(n;1)} - \zeta_0| > \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\eta)^n = \frac{1-\eta}{\eta} < \infty$$

e $X_{(n;1)} \to_{qc} \zeta_1$.

Teorema 2.41. *Sejam* $X_1, X_2, ..., X_n$ *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição* F *definidas em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \Im, P)$. *Assuma que o p-ésimo quantil* $\zeta_p, 0 < p < 1$ *é unicamente definido, isto é,* $\forall \varepsilon > 0, F(\zeta_p - \varepsilon) < F(\zeta_p) = p < F(\zeta_p + \varepsilon)$. *Então o p-'esimo quantil amostral* $X_{(n;k)}$, *com* $k = k_p$, *é tal que* $X_{(n;k)} \to^{P} \zeta_p$ *e* $X_{(n;k)} \to^{qc} \zeta_p$.

Prova:

$$P(|X_{(n;k)} - \zeta_p| \leq \varepsilon) = P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) - P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon).$$

Consideremos a variável aleatória Y^+ *com distribuição binomial de parâmetro* n *e* $F(\zeta_p + \varepsilon)$, *de forma que*

$$P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) = P(Y^+ \geq k) = P(\frac{Y^+}{n} \geq \frac{k}{n}).$$

Contudo $\frac{Y^+}{n} \to^{qc} F(\zeta_p + \varepsilon) > p$ *e* $\frac{k}{n} \to p$. *Concluimos que* $\lim_{n\to\infty} P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) = 1$.

Por outro lado, consideremos a variável aleatória Y^- com distribuição binomial de parâmetro n e $F(\zeta_p - \varepsilon)$, de forma que

$$P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon) = P(Y^- \geq k) = P(\frac{Y^-}{n} \geq \frac{k}{n})$$

e $\frac{Y^-}{n} \to^{qc} F(\zeta_p - \varepsilon) < p$ e $\frac{k}{n} \to p$. Concluimos que $\lim_{n\to\infty} P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon) = 0$.
Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;k)} - \zeta_p| \leq \varepsilon) = 1$$

e $X_{(n;k)} \to^P \zeta_p$.
A prova da convergência quase certa não será reproduzida no texto.

Teorema 2.42. *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ com distribuição F e função densidade de probabilidade $f(x)$ tal que $f(\zeta_p) > 0$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p)}{\gamma} \leq x) = P(Z \leq x)$$

onde $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2}$.
Prova:
Consideremos a variável aleatória Y_n com distribuição binomial de parâmetros n e $F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)$.

$$P(\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p) \leq x) = P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x) = P(Y_n \geq k) =$$

$$P(\frac{Y_n - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)(1 - F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x))}} \geq$$
$$\frac{k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)(1 - F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x))}}).$$

Para calcular o limite, quando $n \to \infty$ da expressão à direita usaremos o teorema do valor médio ($\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a+\theta(b-a)), 0 < \theta\theta < 1$).

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)) = \frac{k}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n}}[\int_0^{\zeta_p} \zeta f(z)dz + \int_{\zeta_p}^{\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x} f(z)dz] =$$

$$\frac{k}{\sqrt{n}} - \frac{np}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n}}[\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x - \zeta_p]f(\zeta_p + \theta(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x) - \zeta_p), 0 < \theta < 1.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(k-nF(\zeta_p+\frac{1}{\sqrt{n}}x))=-xf(\zeta_p)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k-nF(\zeta_p+\frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p+\frac{1}{\sqrt{n}}x)(1-F(\zeta_p+\frac{1}{\sqrt{n}}x))}})=\frac{-xf(\zeta_p)}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Concluimos que, pelo teorema do limite central

$$\lim_{n\to\infty}P(\sqrt{n}(X_{(n;k)}-\zeta_p)\leq x)=P(Z\leq\frac{-xf(\zeta_p)}{\sqrt{p(1-p)}})$$

e

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)}-\zeta_p)}{\gamma}\leq x)=P(Z\leq x)$$

onde $\gamma^2=\frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2}$.

Exemplo 2.43. Sejam $x_1,...,X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de par ametro λ. Desde que $P(X_1>x)=e^{-\lambda x}$ temos que a mediana m é a solução de $e^{-\lambda m}=0,5$, isto é $m=\frac{0,7}{\lambda}$. Portanto

$$f(m)=\lambda e^{-\frac{0,7}{\lambda}}=0,5\lambda.$$

Pelo teorema acima

$$Md\sim N(\frac{0,7}{\lambda},\frac{1}{4n0,25\lambda^2}).$$

Um intervalo de confiança para λ, ao nível de $0,95$ de confiança é obtido através de

$$P(-1,96\leq(Md-\frac{0,7}{\lambda})\sqrt{n}\lambda\leq 1,96)=0,95$$

produzindo

$$(\frac{-1,96+0,7\sqrt{n}}{\sqrt{n}m},\frac{1,96+0,7\sqrt{n}}{\sqrt{n}m}).$$

2.8. **Exercícios.** 1) A função de distribuição G é estável através do máximo se para todo inteiro positivo k, existem constantes α_k e β_k tais que

$$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x), \forall x \in R.$$

Prove que as funções de distribuições

$$W_1^*(x) = \exp[-(-x)^\alpha], \quad x \leq 0, \quad \alpha > 0;$$

$$W_2^*(x) = \exp[-x^{-\alpha}], \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0;$$

$$\Lambda^*(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty.$$

são estáveis através do máximo. 2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de

variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade :

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{(0,\theta)}(x)$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro.

a) Considere sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ definidas por $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$ e $b_n = 0$ e mostre que a função de distribuição de X pertence ao dominio de atração minimal da distribuição de Weibull $W_1(x) = 1 - \exp[-(x)^\alpha], x \geq 0$ para algum $\alpha > 0$.

b) Baseado no limite em distribuição de $X_{1:n}$, padronizada, construa um intervalo de confiança para o parâmetro θ com coeficiente de confiança de $0,9$. 3) Seja $X_1, X_2, ..., X_{100}$ uma amostra aleatória de

tamanho 100 da distribuição de Weibull $F(x) = 1 - \exp[-(\lambda x)^2], x \geq 0$ para algum parâmetro $\lambda > 0$ e seja ξ_M a mediana de F.

Baseado na mediana amostral $\widehat{\xi_M}$, encontre um intervalo de confiança com $0,95$ de confiança para λ.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função de distribuição triangular em $[0,\theta]$, isto é

$$F(x) = \frac{2x^2}{\theta^2} \quad se \quad 0 \leq x < \frac{\theta}{2};$$

$$F(x) = \frac{4x}{\theta} - \frac{2x^2}{\theta^2} - 1 \quad se \quad \frac{\theta}{2} \leq x < \theta.$$

a) Prove que a distribuição tem contato terminal de ordem m em ξ_0 . Quais os valores de ξ_0 e m?

(Uma distribuição tem contato terminal de ordem m no ponto ξ_0 se $F(\xi_0) = 0$ e $F^{(j)}(\xi_0) = 0$ para $1 \leq j \leq m$ e $F^{(m+1)}(\xi_0) \neq 0$). Neste caso sabemos que

$$P(\frac{X_{n:1} - b_n}{a_n} \leq t) \rightarrow 1 - e^{-t(m+1)}, t \geq 0$$

onde $a_n = [\frac{(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_0)}]^{\frac{1}{(m+1)}}$ e $b_n = \xi_0$.

b) Calcule a_n e b_n.

c) Considere $\theta = 10000$ horas e um sistema em série com 100 desses componentes. Qual uma estimativa da probabilidade do sistema sobreviver 150 horas?

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad -\infty < x < \infty$$

a) Verifique se esta densidade é da classe exponencial, isto é

$$\frac{f(x)}{F(x)} \simeq \frac{f'(x)}{f(x)} \simeq \frac{f''(x)}{f'(x)} \simeq ...$$

quando $x \rightarrow -\infty$.

b) Sabemos que

$$P(\frac{X_{n:1} - b_n}{a_n} \leq t) \rightarrow 1 - e^{-e^x}$$

em distribuição para $-\infty < x < \infty$ e onde $F(\xi_{0,n}) = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0,n})}$ e $b_n = \xi_{0,n}$. Calcule a_n e b_n.

c) Usando a aproximação em b) construir um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança igual a 0,9.

Teoria assintótica dos valores extremos

Nas aulas anteriores aprendemos resultados assintóticos de sequências de estatísticas obtidas de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas. Em particular estudamos a Lei Forte (Fraca) dos Grandes Números e o Teorema do Limite Central:

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} X$, com $\mathbb{E}[\mathbb{X}] = \nvdash$ e $\text{Var}(X) = 1$. Considere $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.

Pela Lei Forte dos Grandes Números $\overline{X} \overset{q.c.}{\to} 0$ consequentemente $\overline{X} \overset{P}{\to} 0$ Como a convergência em probabilidade implica convergência em distribuição , temos

$$\overline{X} \overset{D}{\to} \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Contudo, se de certa forma, padronizamos a média amostral temos outro resultado $\sqrt{n} \cdot \overline{X} \overset{D}{\to} N(0,1)$ que é mais interessante.

Em resumo, procuramos $(a_n)_{n\geq 1}$, com $a_n > 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ tais que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - b_n}{a_n} \overset{D}{\to} N(0,1).$$

Pelo Teorema do Limite Central

$$a_n = \sqrt{n\text{Var}(X)} \text{ e } b_n = n\mathbb{E}[\mathbb{X}]$$

são soluções.

Assim acontece com as propriedades assintóticas dos valores extremos.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} X$ tal que $X \sim U(0,1)$. Considere $X_{(n;1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

$$X_{(n;1)} \overset{P}{\to} 0 \text{ e } X_{(n;1)} \overset{D}{\to} \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Contudo

$$n \cdot X_{(1)} \overset{D}{\to} Exp(1).$$

As propriedades assintóticas dos valores extremos são importantes nas aplicações estatísticas. É desejável estimar o risco máximo que decorre das aplicações financeiras ao longo de horas, dias, meses, anos consecutivos. É importante estimar o número de componentes de um sistema em srie para que funcione adequadamente por um longo perodo de tempo. Óbviamente, quando n converge para o infinito, $X_{(n;1)}$ converge quase certamente para o extremo inferior do suporte da função de distribuição F e converge em distribuição para este mesmo valor. Para evitar tais trivialidades padronizaremos $X_{(n;1)}$ por um parâmetro de escala a_n e um parâmetro de translação b_n e analisaremos o limite em distribuição da sequência padronizada

$$(\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n})_{n\geq 1}.$$

Assumiremos, também para evitar trivialidades, que a distribuição limite é no degenerada.

O mesmo ocorre quando analisamos a sequência de máximos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas . Observe que $\max\{X_1, ..., X_n\} = -\min\{-X_1, ..., -X_n\}$ e que se $G(x)$ o limite em distribuição de $X_{(n;1)}$, $\overline{G}(-x)$ é o limite em distribuição de $X_{(n;n)}$

As distribuições limites para a sequência de mínimos (máximos) de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas são de três tipos. Procuramos $(a_n)_{n\geq 1}$, com $a_n > 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ tais que

$$\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \overset{D}{\underset{?}{\rightarrow}} \begin{cases} W_1(x) = 1 - e^{-(x)^{\alpha}} \text{ se } x \geq 0,\ \alpha > 0 \\ W_2(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}} \text{ se } x < 0,\ \alpha > 0 \\ \wedge(x) = 1 - e^{-e^{x}},\quad -\infty < x < \infty \end{cases}.$$

Procuramos $(a_n)_{n\geq 1}$, com $a_n > 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ tais que

$$\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \overset{D}{\underset{?}{\rightarrow}} \begin{cases} W_1^*(x) = e^{-(-x)^{\alpha}} \text{ se } x \leq 0,\ \alpha > 0 \\ W_2^*(x) = e^{-x^{-\alpha}} \text{ se } x > 0,\ \alpha > 0 \\ \wedge^*(x) = e^{-e^{x}},\quad -\infty < x < \infty \end{cases}.$$

A distribuição $W_1(x)$ é denominada distribuio de Weibull, na engenharia é utilizada para analisar dureza de certos materiais. A distribuição de Frechét, $W_2(x)$, é de pequeno interesse nas aplicações desde que é confinada a um suporte negativo e não pode originar-se como um limite em distribuição de variáveis aleatórias nãoo negativas. Mesmo embora $\Lambda(x)$ permite valores negativos em seu domínio, é de algum interesse pois pode originar-se como o limite em distribuição de mínimos de tempos de vida, utilizados em seguros de vida e estudos de mortalidade. A distribuição $W_2^*(x)$ é de pequeno interesse nas aplicações desde que é confinada a um suporte negativo e não pode originar-se como um limite em distribuição de variáveis aleatórias não negativas. A distribuição de Gumbel, $\Lambda^*(x)$ apropriada para descrever medidas de valores extremos como altas temperaturas, velocidade do vento, $\Lambda(x)$ é utilizada como modelo para descrever o mínimo de temperaturas e pressão.

Note que se $X_1, ..., X_n$ são variáveis aleatórias i.i.d, com distribuição F,

$$P\left(X_{(n;1)} > x\right) = P\left(\min(X_1, \ldots, X_n) > x\right) \stackrel{iid}{=} \prod_{i=1}^{n} P\left(X_1 > x\right) = P\left(X_1 > x\right)^n$$

e

$$P\left(\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n} > x\right) = P\left(X_{(n;1)} > a_n x + b_n\right) = \overline{F}(a_n x + b_n)^n,$$

onde $\overline{F}(x) = 1 - P(X \leq x)$.

Exemplo 2.44. Considere a distribuição de Weibull, $F(x) = 1 - e^{-x^\alpha}$, $\alpha > 0$ e $x \geq 0$

$$\overline{F}^n(a_n x + b_n) = e^{-n(a_n x + b_n)^\alpha}$$

Escolhemos $b_n = 0$ e $a_n = n^{-1/\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$ Segue que $\overline{F}^n(a_n x + b_n) = e^{-x^\alpha}$.

Conclumos que a distribuição de Weibull é fechada na formação de mínimos de V.A.(s).

Exemplo 2.45. Seja X uma variável aleatória uniformemente distribuida no intervalo $(0,1)$. $X \sim U(0,1)$, $F(x) = x,\ 0 < x < 1$, $\overline{F}(x) = 1 - x,\ 0 < x < 1$, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\overline{F}^n(a_n x + b_n) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}.$$

Definição 2.46. Duas funções de distribuições $H(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são do mesmo tipo se existem constantes A e B, $A > 0$ tais que

$$G(Ax + B) = H(x) \forall\ x.$$

Se

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com distribuio F

$Z \sim N(0,1)$ com distribuio ϕ

$$F(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

e as distribuições F e ϕ são do mesmo tipo.

Lema 2.47. *(Lema Fundamental) Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuiçõeses tal que, para todo x valem a) e b):*

a) $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{D} G(x)$
b) $F_n(a_n^* x + b_n^*) \xrightarrow{D} G^*(x)$,
onde $G(\cdot)$ e $G^*(\cdot)$ não são degeneradas. Então $G(\cdot)$ e $G^*(\cdot)$ são do mesmo tipo.

OBS: como consequência se obtemos $G(x)$ como o limite em distribuição, podemos obter as distribuições do mesmo tipo que $G(\cdot)$, modificando apropriadamente as sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$.

Observação 2.48. Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid, com função de distribuiçãoo F, inversível, observe que

$$P\left(nF\left(X_{(n;1)}\right) > x\right) = P\left(F\left(X_{(n;1)}\right) > \frac{x}{n}\right) = P\left(X_{(n;1)} > F^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$= \left(P\left(X_1 > F^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)^n = \left(1 - P\left(X_1 \leq F^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (*)$$

Exemplo 2.49. Seja $F(x) = 1 - x^{-\alpha},\ x \geq 1$

$$P\left(\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n} > x\right) = P\left(X_{(n;1)} > a_n x + b_n\right) = P\left(F\left(X_{(n;1)}\right) > F\left(a_n x + b_n\right)\right)$$

$$= P\left(nF\left(X_{(n;1)}\right) > nF\left(a_n x + b_n\right)\right) \stackrel{*}{=} \left(1 - \frac{nF\left(a_n x + b_n\right)}{n}\right)^n$$

$$= \left[1 - \left(1 - \left(a_n x + b_n\right)^{-\alpha}\right)\right]^n = \left(a_n x + b_n\right)^{-n\alpha} \to e^{-x^{-\alpha}},$$

em que $a_n = -\frac{1}{n}$ e $b_n = 1$.

Definição 2.50. Uma função de distribuição $G(\cdot)$ é estável através do mínimo se para todo inteiro positivo k, existem constantes α_k e b_k tais que

$$\overline{G}^k(\alpha_k x + \beta_k) = \overline{G}(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.51. A) A distribuiçãoo de Gumbel é estável através do mínimo

$$\wedge(x) = 1 - e^{-e^x}, -\infty < x < \infty$$

Tomando $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = -\ln(k)$ temos $e^{x-\ln(k)} = e^x e^{-\ln(k)} = e^x e^{\ln(1/k)} = \frac{1}{k}e^x$

$$\overline{\wedge}(\alpha_k x + \beta_k) = e^{-\frac{1}{k}e^x}$$

$$\overline{\wedge}^k(\alpha_k x + \beta_k) = \left(e^{-\frac{1}{k}e^x}\right)^k = e^{-e^x} = \overline{\wedge(x)}$$

B) A distribuição de Weibull é estável através do mínimo $W_1(x) = 1 - e^{-(x)^\alpha}$, $x \geq 0$. Tomando $\alpha_k = \frac{1}{k^{1/\alpha}}$ e $\beta_k = 0$ temos $\overline{W}_1(x) = e^{-(x)^\alpha}$ e

$$\overline{W}_1(\alpha_k x + \beta_k) = \overline{W}_1\left(\frac{x}{k^{1/\alpha}}\right) = e^{-\left(\frac{(x)^\alpha}{k}\right)}$$

$$\overline{W}_1^k(\alpha_k x + \beta_k) = e^{-\left(\frac{x^\alpha}{k}\right)k} = e^{-x^\alpha} = \overline{W}_1(x).$$

Teorema 2.52. *A função de distribuição $G(\cdot)$ é limite em distribuição de $X_{(n;1)}$ se, e somente se, é estável através do mínimo.*

Prova: *A condição é necessária: Por hipótese temos:* $\lim \overline{F}^n(a_n x + b_n) = \overline{G}(x)$.

Note que

$$\overline{F}^{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{D} \overline{G}(x)$$

$$\left[\overline{F}^n(a_{nk}x + b_{nk})\right]^k \xrightarrow{D} \overline{G}(x),$$

que pode ser escrito como $\overline{F}^n(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{D} \overline{G}(x)^{1/k}$*. Segue do Lema Fundamental que* $\overline{G}(x)$ *e* $\overline{G}^{1/k}(x)$ *são do mesmo tipo e portanto existem constantes* α_k *e* β_k *tais que*

$$\overline{G}^k(\alpha_k x + \beta_k) = \overline{G}(x).$$

Para provar que a condição suficiente, basta notar que $G(\cdot)$ *é o limite em distribuição de* $X(1)$ *com* $X_1, \ldots, X_n$ *sendo iid a* $G(\cdot)$*:*

$$P\left(\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n} > x\right) = \overline{G}^n(a_n x + b_n).$$

Tomando $a_n = \alpha_n$ *e* $b_n = \beta_n$*, temos*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n} > x\right) = \lim_{n\to\infty} \overline{G}^n(\alpha_n x + \beta_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{G}(x) = \overline{G}(x).$$

Seja $G(\cdot)$ estv́el atravś do mínimo, isto é, $\exists\ \alpha_k > 0$ e β_k tal que

$$\overline{G}^k(\alpha_k x + \beta_k) = \overline{G}(x)\ \forall\ x \qquad (**)$$

No que segue, as provas omitidas são encontradas no livro Statistical Theory of Reliability and Lifetesting: probability models, Barlow and Proschan, 1981.

Lema 2.53. *(Lema 1) Sejam α_k e β_k constantes satisfazendo $(**)$ para uma distribuição $G(\cdot)$. Então, para todo positivo inteiro j e k temos*

$$\alpha_{jk} = \alpha_j \alpha_k,$$
$$\beta_{jk} = \beta_k + \alpha_k \beta_j = \beta_j + \alpha_j \beta_k.$$

(Prova omitida)

Lema 2.54. *(Lema 2) Se em $(**)$ $\alpha_j = 1$ para algum $j > 1$, então $\alpha_j = 1$ para todo j.*
(Prova omitida)

Exemplo 2.55. A distribuição de Gumbel, $\wedge(x) = 1 - e^{-e^x}$ é estável através do mínimo. $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = -\ln(k)$.

Lema 2.56. *(Lema 3) Se em* $(**)$ $\alpha_j < 1$ *para algum* $j > 1$*, então*

a) *Existe* x_0 *tal que* $G(x_0) = 0$ *e* $G(x) > 0$ *para todo* $x > x_0$.

b) $\beta_k/(1-\alpha_k) = x_0$ *para todo* $k > 1$.

(Prova omitida)

Exemplo 2.57. A distribuição de Weibull, $W_1(x) = 1 - e^{-x^\alpha}$ é estável através do mínimo. $\alpha_k = \frac{1}{k^{1/\alpha}} < 1$ e $\beta_k = 0$.

Lema 2.58. *(Lema 4) Se em* $(**)$ $\alpha_j > 1$ *para algum* $j > 1$*, então*

a) *Existe* x_0 *tal que* $G(x_0) = 1$ *e* $G(x) < 1$ *para todo* $x < x_0$.

b) $\beta_k/(1-\alpha_k) = x_0$ *para todo* $k > 1$.

(Prova omitida)

Lema 2.59. *(Lema 5) Sejam* $\alpha_j,\ j = 1, 2, \ldots$ *as constantes em* $(**)$. *Então:*

a) $\alpha_j < 1$ *para todo* $j > 1$*, ou*

b) $\alpha_j = 1$ *para todo* $j \geq 1$*, ou*

c) $\alpha_j > 1$ *para todo* $j > 1$

(Prova omitida)

No lema 3 e lema 4 podemos, sem perda de generalidade, tomar $x_0 = 0$. Assim o problema de encontrar uma distribuição estável através do mínimo se reduz a encontrar solução para

$$\overline{G}^n(\alpha_n x) = \overline{G}(x) \text{ com } G(x) = 0 \text{ para } x \leq 0 \ (\alpha_n < 1)$$

ou

$$\overline{G}^n(\alpha_n x) = \overline{G}(x) \text{ com } G(x) = 1 \text{ para } x \geq 0 \ (\alpha_n > 1)$$

ou

$$\overline{G}^n(x + \beta_n) = \overline{G}(x)(\alpha_n = 1).$$

2.9. **Dominios de Atração.** Na aula anterior analisamos o resultado, básico, que o mínimo (máximo) de uma amostra aleatória pode ter entre três possíveis limites em distribuições. Nesta aula caracterizaremos classes de distribuições nas quais o mínimo (máximo) de amostras aleatórias converge para cada um dos três tipos, que são chamadas de domínios de atração. Precisamente

Definição 2.60. Uma distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de uma distribuição G se existem constantes a_n e b_n, tais que $\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x)$. Semelhantemente, F pertence ao domínio de atração maximal de G se existem constantes a_n e b_n, tais que $F^n(a_n x + b_n) \to^D G(x)$.

O nosso objetivo é determinar os domínios de atrações minimais para W_1, W_2 e Λ, e os domínios de atrações maximais para W_1^*, W_2^* e Λ^*. Necessitaremos do seguinte Lema:

Lema 2.61.

$$\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x) \Leftrightarrow nF(a_n x + b_n) \to^D -\ln \overline{G}(x).$$

para todo ponto de continuidade de $G(x)$, com $\overline{G}(x_0) \neq 0$,

Prova:
Sob quaisquer das condições

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}((a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} (\overline{F}^n((a_n x + b_n))^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{G}(x))^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Note também que $1 - y \leq \int_y^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{y}(1-y)$.
Portanto

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{nF a_n x + n_n)}{\overline{F}(a_n x + b_n)},$$

e segue que

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}^n(a_n x + b_n).$$

O teorema 3 dá condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração minimal da distribuição de Weibull. O Corolário 4 trata de condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração maximal de W_1^*.

Teorema 2.62. Domínio de atração minimal de $W_1(x)$
A distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, x \geq 0, (\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

A) Existe x_0 *tal que* $F(x_0) = 0$ *e* $F(x_0 + \varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$;
B)) $\lim_{t \downarrow 0}[\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = x^{\alpha}$, *para* $x > 0, (\alpha > 0)$.

Prova:
A condição é suficiente. Considere $x_0 = 0$ *e* $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$ *de maneira que* $\lim_{n \to \infty} nF(a_n) = 1$.
Por hipótese $\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = x^{\alpha}, x > 0$. *Então*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(a_n x)}{F(a_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{nF(a_n x)}{nF(a_n)} = \lim_{n \to \infty} nF(a_n x),$$

e pelo Lema , $-\ln \overline{W_1}(x) = x^{\alpha}$ *e* $\overline{W_1}(x) = e^{-x^{\alpha}}$.
A condição necessária pode ser encontrada em Gnedenko (1943).

Corolário 2.63. Domínio de atração maximal de $W_1^*(x)$ *A distribuição F pertence ao domínio de atração maximal de* $W_1^*(x) = e^{-(-x)^{\alpha}}, x \leq 0 (\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

A) Existe x_1 *tal que* $F(x_1) = 1$ *e* $F(x_1 - \varepsilon) < 1$, $\forall \varepsilon > 0$;
B)) $\lim_{t \uparrow 0}[\frac{\overline{F}(xt+x_1)}{\overline{F}(t+x_1)}] = x^{\alpha}$, *para* $x > 0, (\alpha > 0)$.

Observação 2.64. Observe que $\max\{X_1, ..., X_n\} = -\min\{-X_1, ..., -X_n\}$ e $F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x)$.
Portanto, utilizando a parte A) do teorema anterior, $F_{-X}(x_0) = 0 \to 1 - F_X(-x_0) = 0 \to F_X(-x_0) = 1$ é suficiente considerar $x_1 = -x_0$ de maneira que

$$F_{-X}(x_0 + \varepsilon) > 0 \to 1 - F_X(-x_0 - \varepsilon) > 0 \to F(x_1 - \varepsilon) < 1,$$

e

$$x^{\alpha} = \lim_{t \downarrow 0}[\frac{F_{-X}(xt + x_0)}{F_{-X}(t + x_0)}] = \lim_{-t \uparrow 0}[\frac{1 - F_X(-xt - x_0)}{1 - F_X(-t - x_0)}] = \lim_{t \uparrow 0}[\frac{\overline{F}(xt + x_1)}{\overline{F}(t + x_1)}].$$

Exemplo 2.65. A função de distribuição

$$F(x) = 1 - k(a - x)^{\alpha}, \quad a - k^{\frac{-1}{\alpha}} \leq x \leq a, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x)$. Considere $x_0 = a - k^{\frac{-1}{\alpha}}$. Portanto

$$\lim_{t\downarrow 0}[\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1-k[a-xt-a+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha}}{1-k[a-t-a+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha}} =$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{k\alpha[-xt+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha-1}(-x)}{k\alpha[-xt+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha-1}} = x^{\alpha}.$$

Teorema 2.66. Domínio de atração minimal de $W_2(x)$
A) A distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de $W_2(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}}, x \leq 0, (\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

$$\lim_{t\downarrow -\infty}\frac{F(t)}{F(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

B) A distribuição F pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x) = e^{(-x)^{-\alpha}}, x \geq 0(\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

$$\lim_{t\uparrow\infty}\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

Exemplo 2.67. A função de distribuição

$$\overline{F}(x) = kx^{-\alpha}, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x)$, pois

$$\lim_{t\downarrow -\infty}\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = \frac{kt^{-\alpha}}{kt^{-\alpha}x^{-\alpha}} = x^{\alpha}.$$

Teorema 2.68. Domínio de atração minimal de $\Lambda(x)$ *A distribuição F pertence ao domínio de atração de $\Lambda(x) = 1 - e^{-e^{x}}$ se existe x_0 tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0+\varepsilon) > 0$, $\forall\varepsilon > 0$ e*

$$\lim_{x\downarrow x_0}\frac{d}{dx}[\frac{1}{\phi'(x)}] = 0,$$

onde $\phi(x) = -\ln F(x)$.

Von Mises (1939) apresentou condições para que uma função de distribuição F pertença ao domínio de atração maximal da distribuição de Gumbel,, Λ^*.

Teorema 2.69. Domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$ *A) Considere a função de distribuição* $F(x)$*, com* $F(x) < 1, \forall x$ *e*

$$\lim_{x\uparrow\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0,$$

onde $r(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$*. Então* F *pertence ao domínio de atração maximal de* $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$*, com* $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ *e* $a_n = \frac{1}{nf(b_n)}$*.*
B) Se existe x_1 *tal que* $F(x_1) = 1$ *e* $F(x_1 - \varepsilon) < 1$*,* $\forall \varepsilon > 0$ *e* $\lim_{x\uparrow x_1} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0$*, então* F *pertence ao domínio de atração maximal de* $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$*.*

Exemplo 2.70. A função de distribuição

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty$$

pertence ao domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$.
Temos que

$$\overline{F}(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}, \quad r(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Portanto

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = \lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[1+e^{-x}] = \lim_{x\downarrow-\infty} -e^{-x} = 0.$$

Como $F^{-1}(y) = -\ln(\frac{1}{y} - 1)$, $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ implica que $b_n = F^{-1}(\frac{n-1}{n}) = ln(n-1)$.
Em adic cão $f(b_n) = \frac{n-1}{n^2}$ implica que $a_n = \frac{1}{nf(b_n)} = \frac{n}{n-1}$.
Portanto

$$F^n(a_nx+b_n) = F^n(\frac{n}{n-1}x+\ln(n-1)) = (\frac{1}{1+e^{-(\frac{n}{n+1}x+\ln(n-1))}})^n = (1-(-\frac{e^{-\frac{n}{n-1}x}}{n-1}))^{-n}.$$

e $\lim_{n\to\infty} F^n(a_nx + b_n) = e^{(-e)^{-x}}$.

Lema 2.71. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias indendentes e identicamente distribuidas com uma função de distribuição contínua* F *e sejam* $U_n = nF(X_{(n;1)})$ *e* $V_n = n[1 - F(X_{(n;n)})]$*. Então,* $U_n \to^D Exp[1]$ *e* $V_n \to^D Exp[1]$*.*
Prova:

$$P(V_n \leq v) = P(n[1-F(X_{(n;n)} \leq v) = P(F(X_{(n;n)} \geq 1-\frac{v}{n}) = 1-P(F(X_{(n;n)} \leq 1-\frac{v}{n}) =$$

$$1 - P(X_{(n;n)} \leq F^{-1}(1-\frac{v}{n})) = 1 - P(X_1 \leq F^{-1}(1-\frac{v}{n})) = 1-(1-\frac{v}{n})^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n \leq v) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - \frac{v}{n})^n = 1 - e^{-v}.$$

e $V_n \to^D Exp[1]$.

As definições e resultados que seguem estão na pg 226 do livro From finite sample asymptotic methods in statistic de P.K.Sen, J.M.Singer e A.C.P.Lima (2010)

Definição 2.72. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F, então:
A) F é do tipo Cauchy, se existirem $k > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^k F(x) = c.$$

B) F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenci' avel e

$$\frac{f(x)}{F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

quando $x \to -\infty$.
C) F tem um contato terminal de ordem m em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{1;n}) = 1$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{1;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{1;n}) \neq 0$.

Observação 2.73. Distribuições do tipo exponencial tem momentos finitos de todas as ordens e incluem aquelas comumente empregadas nos métodos estatísticos, tais como a exponencial, normal e gama. Por outro lado as distribuições do tipo Cauchy não tem momentos finitos de ordem $\geq k$ e leva o nome da distribuição típica de Cauchy, para a qual, $k = 1$. Em geral, as distribuições assintóticas dos mínimos amostrais dependem do tipo de distribuição envolvida.

As definições A e B são adequadas para analisar distribuições assintóticas para o mínimo de variáveis aleatórias. para estudarmos as distribuições assintóticas para o máximo de variáveis aleatórias pequenas modificações devem ser consideradas: As distribuições do tipo Cauchy deve ser analizada na vizinhança de ∞

$$\lim_{x\to\infty} |x|^k \overline{F}(x) = c.$$

As distribuições do tipo exponencial são tais que

$$-\frac{f(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

Exemplo 2.74. A distribuição de Cauchy padrão é do tipo Cauchy com $k = 1$ pois:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi^{-1}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+y^2}dy}{\frac{1}{|x|}} \approx \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{|x|^2}} = 1.$$

A distribuição normal padrão é do tipo exponencial, pois nas vizinhança de $-\infty$ temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{x}(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{y^2}{2}}dy} \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - (\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)} \approx -x + \frac{1}{x} \approx -x$$

na vizinhança de $-\infty$

A distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ tem um contato terminal de ordem 0 em um ponto $\xi_{1;n} = \theta$.

Teorema 2.75. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq t) = 1 - e^{-(-x)^{-k}}, \quad x < 0,$$

onde $\xi_{0;n}$ é tal que $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$.

Prova: *Observe que*

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = \frac{F(X_{(n;1)})}{\frac{1}{n}} = \frac{F(X_{(n;1)})}{F(\xi_{0;n})} =$$

$$|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k.\frac{|X_{(n;1)}|^k F(X_{(n;1)})}{F(\xi_{0;n})|\xi_{0;n}|^k} \to |\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k.\frac{c}{c}.$$

Portanto, para $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}}| \geq |x|) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k \geq |x|^{-k}) = 1 - e^{-|x|^{-k}} = 1 - e^{-(-x)^{-k}}.$$

Corolário 2.76. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}}{\xi_{1;n}} \leq t) = e^{(-t)^{-k}}, \quad t \geq 0,$$

onde $\xi_{1;n}$ é tal que $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$.

Teorema 2.77. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo exponencial. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n} \leq x) = 1 - e^{-e^x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Prova: *Usando a série de Taylor em torno de $\xi_{0;n}$, temos*

$$F(\xi_{0;n}) + s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\xi_{0;n})s^n}{n!} = F(\xi_{0;n}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})s^k}{k!}.$$

Portanto

$$F(X_{(n;1)} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!}$$

e

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k a_n^k}{k!},$$

onde $t = \frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Contudo, podemos escrever

$$n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k}{(nf(\xi_{0;n}))^k k!} = \frac{t^k}{k!}[\frac{F(\xi_{0;n})^k}{f(\xi_{0;n})^k} \frac{f^{k-1}(\xi_{0;n})}{f^{k-2}(\xi_{0;n})} \frac{f^{k-2}(\xi_{0;n})}{f^{k-3}(\xi_{0;n})} \cdots \frac{f^1(\xi_{0;n})}{f^0(\xi_{0;n})} \frac{f^0(\xi_{0;n})}{F(\xi_{0;n})}] \approx \frac{t^k}{k!}$$

e concluimos

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \approx e^t$$

com

$$P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = P(t \leq x) = P(e^t \leq e^x) = P(U_n \leq e^x)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} P(U_n \leq e^x) = 1 - e^{-e^x}.$$

Corolário 2.78. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição* F *do tipo exponencial. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n}\leq x)=e^{-e^{-x}},\quad -\infty<x<\infty,$$

onde $F(\xi_{1;n})=1-\frac{1}{n}$ *e* $a_n=\frac{1}{nf(\xi_{1;n})}$.

Teorema 2.79. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição* F *com contato terminal de ordem* m *no ponto* $\xi_{1;n}$, $(F(\xi_{1;n})=1-\frac{1}{n})$. *Então existe uma sequência de constante* $(a_n)_{n\geq 1}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n}\leq t)=e^{-(-t)^{m+1}}\quad se\quad t\leq 0\quad e\quad 1\quad se\quad t>0.$$

onde $a_n=[\frac{(-1)^m(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$.

Prova: *Considere o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto* $\xi_{1;n}$

$$F(\xi_{1;n}-s)=F(\xi_{1;n})+\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k s^k F^{(k)}}{k!}+\frac{(-1)^{m+1}s^{m+1}F^{(m+1)}(\xi_{1;n}-\theta s)}{(m+1)!}=$$

$$F(\xi_{1;n})+\frac{(-1)^{m+1}s^{m+1}F^{(m+1)}(\xi_{1;n}-\theta s)}{(m+1)!}\quad 0<\theta<1.$$

Observe que

$$V_n=n[1-F(X_{(n;n)})]=n[1-F(\xi_{1;n})]+n[F(\xi_{1;n})-F(X_{(n;n)})]=n[F(\xi_{1;n})-F(X_{(n;n)})].$$

Fazendo $s=\xi_{1;n}-X_{(n;n)}$, *temos:*

$$V_n=\frac{(-1)^m n}{(m+1)!}(\xi_{1;n}-X_{(n;n)})^{m+1}F^{m+1}(\xi_{1;n})\frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n}+\theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}.$$

Fazendo $a_n=[\frac{(-1)^m(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$ *e* $W_n=\frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n}+\theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}$ *temos*

$$V_n=(\frac{\xi_{1;n}-X_{(n;n)}}{a_n})^{m+1}.W_n=[-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1}.W_n.$$

Como $W_n\to^P 1$, *concluimos, pelo teorema de Slutsky, que a distribuição assintótica de* $[-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})^{m+1}$ *é a mesma de* V_n *e para* $t\leq 0$,

$$P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n}\leq t)=P([-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1}\geq(-t)^{m+1})$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = e^{[-(-t)^{m+1}]}, \quad se \quad t \leq 0 \quad e \quad 1 \quad se \quad t > 0.$$

Exemplo 2.80. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Assim $F(x) = \frac{x}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e $F^{(1)}(x) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e portanto F tem contato terminal de ordem $m = 0$ e temos $a_n = \frac{\theta}{n}$ com $\xi_{1;n} = \theta$. Cocluimos

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{n}{\theta}(X_{(n;n)} - \theta) \leq t) = e^t, t \leq 0.$$

Email address: bueno@ime.usp.br

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil