

$$d\text{Ln}x_1/dm_2$$

Partido do conceito da fração molar do solvente na base 1kg de solvente:

$$x_1 = \frac{1}{1 + m_2 M_1 / 1000}$$

$$\text{Ln}x_1 = \text{Ln}\left(\frac{1}{1 + \frac{m_2 M_1}{1000}}\right)$$

$$\text{Ln}x_1 = \text{Ln}1 - \text{Ln}\left(1 + \frac{m_2 M_1}{1000}\right)$$

$$\text{Ln}x_1 = -\text{Ln}\left(1 + \frac{m_2 M_1}{1000}\right)$$

Considerando, agora:

$$y = \text{Ln}x_1 \quad (\text{I})$$

$$y = -\text{Ln}\left(1 + \frac{m_2 M_1}{1000}\right) = -\text{Ln}u$$

Ou seja,

$$u = \left(1 + \frac{m_2 M_1}{1000}\right) \quad (\text{II})$$

E,

$$du = \left(\frac{M_1}{1000}\right) dm_2 \quad (\text{III})$$

Então, temos:

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{u}$$

Ou seja

$$dy = -\frac{1}{u} du \quad (\text{IV})$$

Agora, substituindo I, II e III em IV, temos a solução:

$$d\text{Ln}x_1 = -\frac{M_1/1000}{\left(1 + \frac{m_2 M_1}{1000}\right)} dm_2$$