Aula 3 - Convergência Quase Certa

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Setembro de 2020

1.Definição. Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida em Ω com valores em $\mathbb{R}$, isto é, para cada $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \mathbb{R}$, é um número real.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias. Para cada realização ω , $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais que pode (ou não) convergir para um valor real $X(\omega)$.

Seja

$$N^c = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

Se $P(N^c) = 1$ dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge **quase certamente** para X. Denotamos $X_n \to^{qc} X$.

Observe que $P(N) = 1 - P(N^c) = 0$ e também dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X a menos de um conjunto de medida nula.

Observação 1 O limite é único. Suponha que exista uma outra variável aleatória Y, tal que $X_n \to^{qc} Y$, isto é, existe M^c com $P(M^c) = 1$

$$M^c = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to Y(\omega)\}.$$

Mas $P(N^c \cap M^c) = 1$ e em $N^c \cap M^c$ temos $X(\omega) = Y(\omega)$.

Exemplo 1
Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, $X \sim U(0,1)$.
Defina

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - X)^{k-1}.$$

Para cada $\omega, 0 < X(\omega) < 1$, temos

$$\lim_{n \uparrow \infty} X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - X(\omega))^{k-1} = \frac{1}{X(\omega)}$$

com

$$P(\lim_{n \uparrow \infty} X_n(\omega) = \frac{1}{X(\omega)}) = P(0 < X < 1) = 1$$

$$\text{e } X_n \to^{qc} \tfrac{1}{X}.$$

Convergência Quase Certa

Defina

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{5.X}{3})^k.$$

Para cada $\omega, 0 < X(\omega) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{5.X(\omega)}{3})^k = \frac{1}{1 - \frac{5.X(\omega)}{3}}.$$

Se $\frac{5.X(\omega)}{3} < 1$, isto é, $X(\omega) < \frac{3}{5}$, então

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{5.X(\omega)}{3}}) = P(X < \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$$

$$\text{e } Y_n \nrightarrow^{qc} Y.$$

Observação 2 Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Uma condição equivalente para que $\lim_{n\uparrow\infty} a_n = a$ é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall k, k \geq n, \;\; |a_k - a| < \varepsilon,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall k, k \geq n, \;\; |a_k - a| < \frac{1}{m}.$$

Convergência Quase Certa

Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \to^{qc} X$. Então

$$N^c = \{\omega \ \mid \ \lim_{n\uparrow\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$$

$$\{\omega \ \mid \ \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall k, k \geq n, \ \ |X_k(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\}.$$

Portanto $P(N^c) = 1$ se, e somente se,

$$P(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

que é equivalente a

$$P(\liminf \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

ou

$$P(\limsup \{\omega \ \mid \ |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Corolário
Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, e os eventos

$$A_k = \{\omega \;\mid\; |X_k(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \;\; \forall m \geq 1$, então $X_n \rightarrow^{qc} X$.

Prova Segue do Lema de Borel Cantelli.

Exemplo 2
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \frac{1}{m}) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \frac{1}{m}) = P(X_n > (\ln n)^{\frac{1}{m}}) =$$

$$e^{-(\ln n)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}.$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} = \infty$, se $m \geq 1$.

Concluímos, pelo lema de Borel Cantelli, que
$P(\limsup |Y_n - 0| > \frac{1}{m}) = 1$ e, portanto, $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Exemplo 3 Considere o espaço $((0,1), \Im, P)$, onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.
Defina a variável aleatória

$$X_n(\omega) = 2^n \quad se \quad \omega \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,
$P(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1)) = 1$ e $X_n \to^{qc} 0$.

Contudo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Mas as variáveis X_n não são independentes pois

$$X_n = 2^n$$

$$X_{n-1} = 2^{n-1}$$

e, portanto, o Lema de Borel Cantelli não vale.

Operações com limites
P.1 - Se $X_n \to^{qc} X$ e f é uma função real contínua, então

$$f(X_n) \to^{qc} f(X).$$

Prova
O resultado vale, pois

$$N^c = \{\omega \in \Omega \ | \ X_n(\omega) \to X(\omega)\} =$$

$$\{\omega \in \Omega \ | \ f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))\}$$

e, portanto, $P(N^c) = 1$.

P.2 - Se $X_n \rightarrow^{qc} X$ e $Y_n \rightarrow^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \rightarrow^{qc} X \pm Y;$$

$$X_n . Y_n \rightarrow^{qc} X . Y;$$

$$\frac{X_n}{Y_n} \rightarrow^{qc} \frac{X}{Y}, \quad \textit{quando} \quad \textit{bem} \quad \textit{definida}.$$

Prova

Sejam

$$N_X^c = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \to X(\omega)\} \;\; e \;\; N_Y^c = \{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \to Y(\omega)\},$$

com $P(N_X^c) = 1$, $P(N_Y^c) = 1$, o que é equivalente a

$$P(N_X^c \cap N_Y^c)) = 1.$$

Se $\omega \in N_X^c \bigcap N_Y^c)$, temos:

$$(X_n \pm Y_n)(\omega) \to^{qc} (X \pm Y)(\omega);$$

$$(X_n . Y_n)(\omega) \to^{qc} (X . Y)(\omega);$$

$$(\frac{X_n}{Y_n})(\omega) \to^{qc} (\frac{X}{Y})(\omega), \quad quando \quad bem \quad definida.$$