Integral de Riemann

A Int de Riemann foi formalizada em meados do século XIX. Desde 1820 Cauchy tinha formulado uma ideia aproximada. Outros também trabalharam. Esta definição é útil, mas comprovou-se muito exigente.

O problema que surgiu é com a passagem ao limite sob o sinal de integração.

Por exemplo, em quais condições (1)

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b \lim f_n(x)\, dx$?

Exemplo: $I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-nx^3}}{\sqrt{x}}\, dx$ (integral imprópria)

Temos $f_n(x) = \begin{cases} e^{-nx^3}/\sqrt{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

com $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Podemos dizer que $I_n \to 0$?

b. Se $F(t) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx}\, dx \overset{?}{\Rightarrow} F'(t) = \int_0^\infty (-x^3)\, e^{-tx}\, dx$

Em geral, se $\varphi(t) = \int_a^b f(t,x)\, dx$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ integrável em x, segue que $\varphi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx$?

c. Ou ainda:

Se f_n integráveis Riemann e $f_n \to f$ pontualmente. Então, f é integrável Riemann?