MAT6612 - Dinâmica de Transformações do Círculo

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - $2^{\underline{0}}$ Semestre de 2020

Questão 1. Seja $\mathrm{R}_\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a rotação dada por $\mathrm{R}_\theta(x) = x + \theta \bmod 1$. Mostre que:

(1) R_θ possui pontos periódicos se, e somente se, $\theta \in \mathbb{Q}$ e para algum $n \in \mathbb{N}$, R_θ^n é a identidade.
(2) R_θ não possui pontos periódicos se, e somente se, R_θ é minimal.
(3) O limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \leq i < n : \mathrm{R}_\theta^i(x) \in [p, \mathrm{R}_\theta(p))\}}{n}$ existe e não depende de x e nem de p.
(4) Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, então a medida de Lebesgue λ é a única medida invariante de R_θ.
(5) Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, então R_θ é ergódica em relação à medida de Lebesgue.
(6) Se $\theta \notin \mathbb{Q}$, então R_θ não é fracamente misturadora em relação à medida de Lebesgue, isto é: existem boreleanos A e B tais que:
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda(\mathrm{R}_\theta^{-i}(A) \cap B) - \lambda(A)\,\lambda(B)| = 0$ não ocorre.

Questão 2. Seja $\mathrm{Dif}^r(\mathbb{S}^1)$ o conjunto dos difeomorfismos que preservam orientação $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de classe C^r, $r \geq 1$. Mostre que se $f \in \mathrm{Dif}^r(\mathbb{S}^1)$ vale que:

(1) Se f possui um ponto periódico, então o conjunto ω-limite e α-limite de toda órbita é uma órbita periódica atratora.
(2) O limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{0 \leq i < n : f^i(x) \in [p, f(p))\}}{n}$ existe e não depende de x e nem de p.
(3) Se $J \subset \mathbb{S}^1$ é um arco de círculo tal que $J, \ldots, f^n(J)$ tem multiplicidade de interseção N, então $\dfrac{Df^n(x)}{Df^n(y)} \leq K$, para todo $x, y \in J$, onde K depende apenas de f e N.

Questão 3. Mostre que $f(x) = x + \dfrac{1}{10}\,\mathrm{sen}^2(\pi x) \bmod 1$ é unicamente ergódica mas não é transitivo.

Questão 4. Sejam $[y]$ a parte inteira de y e $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ o mapa de Gauss (veja a Figura 1) dado por:

$$\varphi(x) : \begin{cases} 1/x - [1/x], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

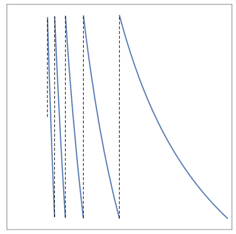

Figura 1. Mapa de Gauss

Considere a medida de Gauss μ tal que se $B = (a, b)$ é dada por:

$$\mu(B) = \frac{1}{\ln 2} \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1+b}{1+a}$$

(1) Mostre que $\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu(B)$ (invariância).
(2) Mostre que se $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ e $a_i = [1/\varphi^{i-1}(x)]$, $1 \leq i \leq n$, então:
$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n + \varphi^n(x)}}}}$$
(3) Considere $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ e defina
$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$
chamada *fração contínua finita*. Mostre que x é racional se, e somente se, $\varphi^n(x) = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e vale $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
(4) Dado $x \notin \mathbb{Q}$ considere $a_i = [1/\varphi^{i-1}(x)]$ e mostre que a sequência $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ converge para x.
(5) Calcule x tal que $x = [1, 1, \ldots, 1, \ldots]$